Эдуард Эйлазян

Обратные задачи в шахматной композиции
Часть 1

1. Об обратных задачах

Понятие "обратная задача" знакомо всем, кто когда-то учился в школе, даже тем, кто математику не любит и старается держаться от нее подальше. В школьной программе по математике и физике решению обратных задач уделяется достаточно большое внимание, поскольку это способствует более глубокому усвоению учебного материала. Кроме того, теория и методы решения обратных задач используются не только в учебно-педагогическом процессе, но и в научно-исследовательской работе. Примеры постановки и решения обратных задач можно найти в таких областях деятельности как: математика, механика, геофизика, астрономия, робототехника, спектральный анализ, медицина, экономика, бизнес и т. д.

Пожалуй, самый известный в науке пример решения обратной задачи связан с открытием 8-й планеты – Нептуна. В небесной механике возмущения движения небесного тела обычно вычисляют по уже известному расположению других планет. При изучении движения Урана возникла необходимость решить обратную задачу: зная возмущения, найти расположение вызывающей их неизвестной планеты. Эту трудную задачу решил французский астроном Урбен Леверье в 1845 году.

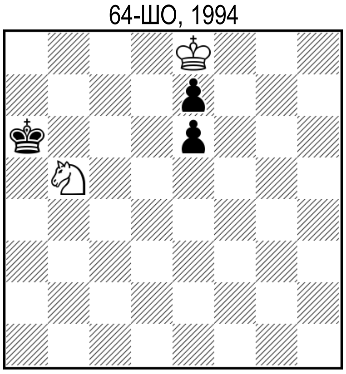
Имеет ли шахматная композиция какое-либо отношение к решению обратных задач? Имеет самое непосредственное. Если поиск комбинаций в практической партии, решение задач и этюдов условно считать прямой задачей в шахматах, то составление шахматных композиций – это решение обратной задачи. Можно даже утверждать, что шахматная композиция возникла как “обратная задача” по отношению к шахматной игре, а затем в процессе длительного исторического развития сформировалась как самостоятельное направление шахматного искусства. В каждом жанре шахматной композиции действуют свои “правила игры” и свои особенности решения “обратной задачи”.

2. Постановка обратной задачи в жанре Ser.h#n-N (Ser.h=n-N).

В данной статье речь пойдет о постановке и решении новой обратной задачи в шахматной композиции.
Есть такой жанр: серийный кооперативный мат (или пат) в n ходов Ser.h#n (Ser.h=n). Черные делают n ходов подряд, после чего у белых появляется возможность объявить черному королю мат в 1 ход (или запатовать). Но есть особая разновидность задач этого жанра: помимо решения самой задачи необходимо ещё найти число решений. Для этих целей привлекается комбинаторный анализ. Множественность решений возникает за счет перестановок ходов, но без разветвлений и дуалей. Каждая фигура движется строго по своей траектории от начального положения к финальному. Это шахматно-математические задачи, не имеющие специального названия. Обозначать их можно так: Ser.h#n-N? и Ser.h=n-N?.

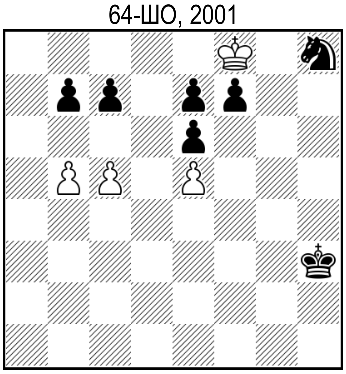
В 1994 году был проведен международный конкурс решения таких шахматно-математических задач.
№1 – одна из задач того конкурса.

№1. Eero Bonsdorff
64-ШО, 1994



Ser.h#16-N? 2+3

№2. Руслан Пономарев
64-ШО, 2001



Ser.h=36-N? 4+7

Решение №1. **1-5.e1♖ 6.♖c1 7-11.e1♗ 12-13.♗b8 14.♖c7 15-16.♔c8 ♘d6#.**
Подсчет числа решений – задача из области комбинаторики. $N = C^2_{16} * C(5) = 120*42 = 5040$.
Здесь C(5) – число Каталана. (Числа Каталана C(n) для n = 0, 1, 2, … образуют последовательность: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132 ...).

В своем письме с решениями конкурсных задач я задал организаторам конкурса ряд вопросов, среди которых был такой: *можете ли Вы составить задачу Ser.h#n по заданному числу решений N?* По существу, это была постановка обратной задачи.

На одном из занятий с Русланом Пономаревым при подготовке к чемпионату мира 2001-го года я предложил ему для решения несколько задач вышеупомянутого конкурса. Руслан так увлекся, что на следующее утро показал мне две составленные им за ночь задачи. Одна из них (№2) опубликована в журнале «64-ШО» №11 2001. Решение №2:
1-4.f2 5-6.♔f5 7.f1♖ 8.♖a1 9-12.♘b6 13-17.e1♗ 18-20.♔d8 21-22.♖c8 23.♘a8 24-27.♗b8 28-32.e1♗ 33-35.♗a7 36.b6 c6 пат.
Очень красивая задача, по богатству содержания превосходящая все конкурсные задачи.
Мы привели два примера шахматно-математических задач, в которых ставится и решается *прямая задача*.
Но можно поставить и обратную задачу**.**

Формулировка обратной задачи: *для заданных значений n и N составить шахматно-математическую задачу на серийный кооперативный мат (или пат) в n ходов, имеющую N решений.*
Для задач такого типа можно ввести обозначения: Ser.h#n-N и Ser.h=n-N.
Пару чисел (n, N) будем называть *исходными данными* задачи. Не факт, что для любой пары чисел (n, N) решение существует.
Для решения сформулированной выше обратной задачи мной разработана теория, основные положения которой изложены в настоящей статье.

Этапы решения обратной задачи.
Решение любой шахматной задачи жанра Ser.h#n-N? представляет собой некую совокупность траекторий движения фигур на доске. Но это не произвольная совокупность, а четкая *конфигурация взаимосвязанных траекторий*, которая характеризуется (описывается) набором параметров (количественных и качественных). Траекторию образуют одна фигура или группа фигур, движущихся в решении в строго определенной последовательности. Конфигурацию характеризуют: общее число траекторий, число автономных траекторий, особенности взаимного расположения траекторий на доске, тип взаимодействия траекторий. Эти отличительные особенности позволяют провести классификацию конфигураций траекторий. Каждому набору параметров конфигурации соответствует N – число решений задачи. Это – прямая задача: по заданной позиции найти число решений.

Решение обратной задачи жанра Ser.h#n-N состоит из двух этапов.

Первый этап: построение математической модели решения обратной задачи.
Исходные данные задачи – число решений N и число ходов в решении n. Из множества возможных абстрактных конфигураций выбираем конфигурацию траекторий определенного класса, руководствуясь соображениями простоты и удобства последующей реализации. Затем для выбранной конфигурации траекторий уточняем (вычисляем) значения параметров. На этой стадии решения у нас тоже имеется свобода выбора, но в пределах заданных ограничений (значения n, N). Если удовлетворительной системы параметров для выбранной конфигурации нет, то необходимо перейти к другой, более адекватной конфигурации траекторий.

Второй этап: реализация математической модели на шахматной доске в виде шахматной задачи Ser.h#n-N (Ser.h=n-N).
Может возникнуть естественный вопрос: как по математической модели составить шахматную задачу? Никаких четких указаний на этот счет нет и быть не может. Составление любой задачи – процесс творческий. Можно дать лишь рекомендации общего характера. Прежде всего надо четко представить себе сценарий решения, содержащий конфигурацию траекторий модели, и под этот сценарий придумать идею задачи. В процессе составления необходимо добиваться точного совпадения параметров решения с параметрами модели. Это довольно трудоемкий процесс и не всегда удается для заданных n и N довести решение обратной задачи до логического завершения. (В некоторых случаях в условии обратной задачи задаётся только значение N, а параметр n может принимать произвольные значения).

Конечный результат зависит от того, насколько органично шахматные компоненты задачи сочетаются с параметрами модели. Понятно, что по одной модели может быть составлено множество задач, имеющих определенную эстетическую ценность.

Описанные выше два этапа решения обратной задачи можно рассматривать как **две разновидности обратных задач**.

Прямая задача. Составление шахматной задачи жанра Ser.h#n-N? без каких-либо предварительных условий и ограничений. На выходе мы получаем задачу, математическую модель и два числа (n, N).

Обратная задача 1-го рода. По заданной модели составить шахматную задачу Ser.h#n-N.
В качестве исходной математической модели может быть использована модель задачи-прототипа жанра Ser.h#n-N?, либо оригинальная модель, построенная в результате математического исследования.

Обратная задача 2-го рода. Для заданной пары чисел (n, N) составить задачу жанра Ser.h#n-N в n ходов, имеющую N решений.
Условно можно считать, что решение обратной задачи 1-го рода – это составление задачи на заданную тему. Автору приходится решать только шахматные проблемы, поскольку модель со всеми своими параметрами задана однозначно. При решении обратной задачи 2-го рода автору необходимо предварительно провести математическое исследование, построить одну или несколько математических моделей (если это возможно), а затем по одной из них составить шахматную задачу. В этом случае автор свободен в выборе модели из некоторого множества построенных моделей.

3. Вычисления на решетках. Два основных принципа.

Метод построения математической модели задачи удобно излагать, имея наглядное графическое представление решения задачи в виде решетки. Проиллюстрируем это на простом примере.

Пусть решение некоторой условной задачи Ser.h#n-N? содержит две автономные (для простоты) траектории длиной 3 хода и 8 ходов соответственно. Ясно, что в этом случае n = 11. Число решений требуется найти. Нам даже не надо знать, о какой конкретно позиции идет речь. Приведенных данных вполне достаточно для изложения сути метода. Строим решетку, содержащую 3×8=24 ячейки и (3+1)*(8+1) = 36 узлов. (В данном случае мы получим двумерную решетку. В общем случае решетка будет многомерная – по числу траекторий, образующих конфигурацию.) Ход по одной траектории будем отображать на решетке движением на один шаг по вертикали вверх, а ход по другой траектории – движением на один шаг по горизонтали вправо. Решетку можно трактовать как фазовое пространство решений задачи. Узлы решетки – точки в фазовом пространстве – соответствуют позициям, возникающим на доске при демонстрации решения от начальной позиции (нижний левый угол) до финальной (верхний правый угол). Каждое решение задачи представляет собой траекторию движения фазовой точки из начальной позиции в конечную (не путать траектории фазовой точки на решетке и траектории фигур в решении задачи!). В каждой ячейке будем записывать число, равное числу способов достижения верхнего правого узла данной ячейки из начальной позиции. Число, стоящее в верхней правой ячейке решетки, будем называть *суммой решетки* (S); оно равно числу траекторий, соединяющих начальный и конечный узлы решетки.

Заполнение ячеек решетки от начального узла до конечного будем называть движением *в прямом направлении.* Но можно начать процесс заполнения решетки с конечного узла и двигаться к начальному. Такой процесс будем называть движением *в обратном направлении*. В этом случае число в каждой ячейке будет относиться к левому нижнему углу ячейки.

4	10	20	35	56	84	120	165
3	6	10	15	21	28	36	45
2	3	4	5	6	7	8	9

Решетка задачи Ser.h#11-N?

Мы получили фрагмент хорошо известного со времен Омара Хайяма треугольника Паскаля.
«Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике.» Мартин Гарднер.

В нашем случае сумма решетки S=165, т.е. наша условная задача имеет 165 решений.
В более сложных случаях полезно использовать два принципа, упрощающих вычисления на решетках: принцип обратимости и принцип аддитивности.
Принцип обратимости. При изменении направления заполнения решетки сумма решетки сохраняет свое значение.
Правило произведения. Число траекторий фазовой точки, проходящих через данный узел, равно произведению числа траекторий, ведущих из начального узла в данный узел на число траекторий, ведущих из данного узла в конечный узел.
Определение. Сечением называется условная линия, соединяющая все узлы, равноудаленные от начального узла решетки.
Принцип аддитивности. Сумма решетки равна сумме траекторий, проходящих через все узлы сечения.

$S = \Sigma A_i$, где A_i – число траекторий, проходящих через i-й узел сечения.

Если a_i и b_i – числа i-го узла при движении в прямом и обратном направлении соответственно, то $A_i = a_i*b_i$ и $S = \Sigma a_i*b_i$
Проиллюстрируем действие этих принципов на нашем демонстрационном примере.
Принцип обратимости. Для симметричной решетки результат очевиден.

9	8	7	6	5	4	3	2
45	36	28	21	15	10	6	3
165	120	84	56	35	20	10	4

Сумма решетки S = 165

При желании можно убедиться в том, что тот же результат справедлив и для произвольной решетки.
Принцип аддитивности. Выделим на решетке узлы, достижимые из начальной точки за k ходов. Пусть для определенности k=6. Сечение – диагональная линия – содержит 4 узла. Для каждого из этих четырех узлов подсчитаем его значение в прямом и обратном направлении. Для каждого узла получим пару чисел (a_i, b_i). Принцип аддитивности позволяет по этим числам найти сумму решетки.

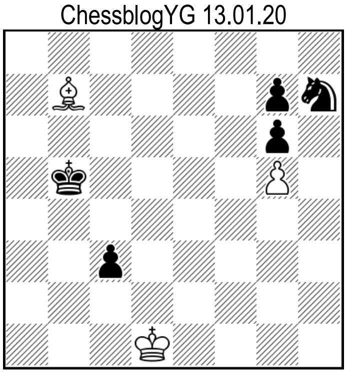
4	10	20		5	4	3	2
3	6	10	15		10	6	3
2	3	4	5	6		10	4

Сумма решетки: $S = \Sigma a_i*b_i = 20*1 + 15*5 +6*10 + 1*10 = 165$.

4. Пример решения обратной задачи 1-го рода

Решение любой задачи Ser.h#n-N? содержит полную информацию о её математической модели, которую определяют: конфигурация траекторий, параметры, число решений. Используя эту информацию в качестве исходных данных, можно поставить и решить обратную задачу 1-го рода. В результате мы получим новую шахматную задачу, сходную по структуре с исходной.
Пример. Возьмём в качестве прототипа задачу №1. Задача №3 составлена на основе анализа структуры решения задачи №1.

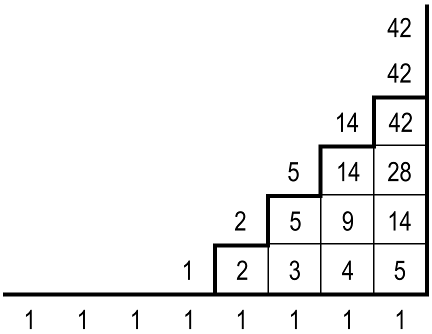
№3. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 13.01.20



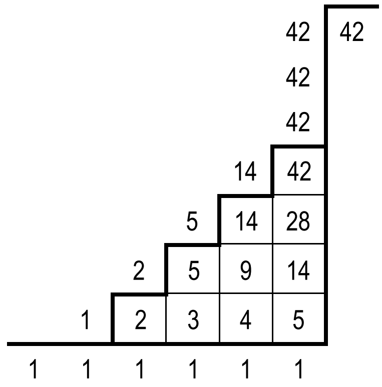
Ser.h#16-N 3+5

Решение №3. **1.♘xg5 2.♘e4 3-7.g1♗ 8.♗d4 9-13.g1♗ 14.♗e3 15-16.♔d3 ♗a6#. N = 5040**.
Число решений подсчитывается точно так же, как и в задаче №1: $N = C^2_{16} * C(5) = 120 * 42 = 5040$.

В задаче №1 есть одна автономная траектория (2 хода короля), а две траектории взаимосвязаны по схеме Каталана. Одна траектория – ходы пешки e6 (горизонтальные отрезки решетки), вторая – ходы пешки e7 (вертикальные отрезки).
В задаче №3 также имеется одна автономная траектория (2 хода короля), а две траектории взаимосвязаны по схеме Каталана. Одну траекторию образуют ходы коня и ходы пешки g6 (горизонтальные отрезки), а вторую – ходы пешки g7 (вертикальные отрезки). Интересно сопоставить решетки, построенные для этих двух задач.



Модель задачи №3



Модель задачи №1

Модели двух задач (№1 и №3) математически эквивалентны, они отличаются только тем, что ячейки одной решетки заполняются в прямом направлении, а ячейки другой – в обратном направлении, что, как мы знаем, никак не влияет ни на число ходов в решении (n = 16), ни на число решений ($N = C^2_{16} * S = 120 * C(5) = 120*42 = 5040$).

5. Вековая задача

Прежде чем приступать к изложению теории решения обратной задачи 2-го рода в общем виде, попробуем решить одну частную задачу на основе эвристических соображений. Это нам поможет выявить трудности и наметить пути их преодоления при построении более общей теории.

Пусть требуется решить обратную задачу 2-го рода: составить задачу Ser.h#n-N при заданных значениях n=20 и N=2020. Почему выбраны именно такие числа, думаю, понятно без пояснений.

Разложим число решений N на простые множители. N = 2020 = 2*2*5*101. Или N = 20*101 = 101*20 → 1.01.20 - календарная дата Нового года (с сокращённой формой записи года)! Подобные совпадения (число лет = числу веков) случается раз в 100 лет! 1818, 1919, 2020, 2121 – ряд этот можно расширять в обе стороны, пока производящее число n остается двузначным.

Такие задачи заслуживают особого названия.

“Вековая задача” – так будем называть задачу в n ходов, имеющую N решений, где n – двузначное число, а N = n*101.

Для решения обратной задачи Ser.h#20-N при N = 2020 нам надо выбрать конфигурацию траекторий решения и уточнить значения параметров конфигурации.

К параметрам относятся: число траекторий, длина каждой траектории, числовые характеристики конкретных форм взаимодействия траекторий. Разумеется, выбор конфигурации траекторий не ограничен жесткими рамками, но мы будем исходить из принципа простоты и естественности.

Проводим следующие рассуждения:

Пусть в конфигурации траекторий имеется одна автономная траектория длиной в 1 ход.

Поскольку n = 20, то на остальные траектории конфигурации приходится 19 ходов.

Конфигурация без автономной траектории должна давать 101 решение при 19 ходах.

Тогда общее число решений исходной задачи будет равно заданному числу N = 2020.

Нам удалось свести исходную задачу к более простой Ser.h#19-S, (S = 101). Будет ли достаточно двух траекторий? Предположим, что да. Тогда k + m = 19, где k и m количество ходов этих траекторий соответственно. Существует 9 пар таких чисел. Начнем с самого простого случая: k = 1, m = 18. В этом случае число решений равно $C^1_{19} = 19 < 101$. Не подходит. Следующая пара k = 2, m = 17. Если бы эти траектории были независимы, то число решений $C^2_{2+17} = 171$, т.е. было бы больше 101. Значит эти две траектории должны быть каким-то образом взаимосвязаны. Ничего определенного о характере взаимодействия двух траекторий мы сказать не можем. Пока ограничимся рассмотрением лишь одного частного случая: их прямого пересечения – обструкции. (Другие типы взаимодействия будут рассмотрены ниже.)

Параметры пересечения траекторий: 1-й ход на короткой траектории, q-й ход – на длинной. Найдем значение q из условия, что число решений равно S = 101. $S = C^2_{2+q-1} + C^2_{2+16-q} = C^2_{q+1} + C^2_{18-q} = 101$.

Или после упрощений получим квадратное уравнение $q^2 - 17q + 52 = 0$.

Решая это уравнение найдем два значения для q: $q_1 = 4$ и $q_2 = 13$.

Мы нашли параметры траекторий для выбранной конфигурации. Параметры математической модели решения задачи получены. Представим модель в виде решетки (при q = 4). (Здесь и далее автономный ход на решетке не отображается.)

3	6	10	10	11	13	16	20	25	31	38	46	55	65	76	88	101
2	3	4		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

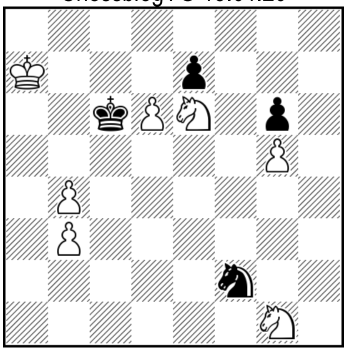
q t

При реализация полученной математической модели были рассмотрены десятки шахматных схем, прежде чем появилась корректная версия – задача №4. Главная трудность состояла в отсутствии компьютерных программ для проверки задач данного типа.

Это первая задача в жанре Ser.h#n-N – решение обратной задачи 2-го рода.

№4. Эдуард Эйлазян

ChessblogYG 13.01.20



Ser.h #20-N 7+4

Решение №4. **1.ed 2.d5 3.d4 4.d3 5.d2 6.d1♖ 7.♖xg1 8.♖xg5 9.♖c5 10.g5 11.g4 12.g3 13.g2 14.g1♗ 15.♗h2 16.♗c7 17.♗a5 18.♘d3 19.♘xb4 20.♔b5 ♘d4#. N = 2020.**

Число решений.

1. Ход ♔b5 можно сделать на любом ходу решения (20 возможных способов);
2. Из оставшихся 19 ходов 2 хода делает конь и 17 ходов делают пешки (до и после превращения);
3. Траектории движения коня и пешки e7 пересекаются на поле d3;
4. До пересечения траекторий 2 хода коня и 3 хода пешки можно выполнить C^2_{2+3} способами.
5. После пересечения траекторий 2 хода коня и оставшиеся 12 ходов можно выполнить C^2_{2+12} способами;
6. Следовательно 19 ходов черные могут сделать $C^2_5 + C^2_{14} = 10 + 91 = 101$ способом;
7. С учетом хода короля (см. п.1) получаем общее число решений **N = 101 * 20 = 2020.**

Содержание задачи.

1. Число решений задачи N = 2020 при задании: мат в 20 ходов. “Вековая задача” текущего года;
2. Идеальный мат в центре доски.
3. Эксцельсиор, два слабых превращения; три активных блокирования разными фигурами.

6. О классификации конфигураций траекторий

Решение обратной задачи 2-го рода в самом общем виде представляет собой нетривиальную математическую проблему. Главная трудность состоит в том, что при разработке общего метода решения необходимо учитывать влияние большого числа факторов, таких как число траекторий в конфигурации, характер их взаимодействия, параметры взаимодействия. Одновременный учет всех этих факторов несовместим с такими важными характеристиками метода как простота, наглядность и удобство в применении.

Другая трудность заключается в том, что даже если удастся разработать регулярный метод построения моделей, останется проблема реализации сложных моделей в виде шахматной задачи. Построение модели не является конечной целью решения обратной задачи 2-го рода. Поэтому нет никаких оснований оценивать качество построенной модели, её оптимальность и эффективность по каким-либо заранее заданным объективным критериям. Говорить о ценности модели можно лишь после создания на ее основе произведений шахматной композиции. Но это уже субъективный критерий оценки.

Более разумная стратегия при разработке теории решения обратных задач 2-го рода состоит в продвижении от простого к сложному. Надо выделить простейшие схемы конфигураций траекторий, провести исследование, получить значения параметров моделей. После этого перейти к исследованию более сложных случаев с дальнейшим обобщением полученных результатов.

Следуя этой стратегии, начнем с исследования конфигураций, содержащих всего три траектории. Пусть a, k, m – длины этих траекторий. Но даже в этом случае задача остается достаточно сложной в силу своей многофакторности. Необходимо ввести дополнительные ограничения и рассмотреть частные случаи этой упрощенной задачи. Если не оговорено противное, то будем считать, что одна из трех траекторий в конфигурации – автономная и длина её равна a. Если решетка, построенная на двух зависимых траекториях, имеет сумму S, то $N = C^a_n * S$. Отсюда следует, что для вековых задач a = 1 при S = 101.

Частные случаи, представляющие практический интерес:

1. Вековая задача 2-го рода (n, n*101). Распределение ходов решения по траекториям (1+2+m); схема ВЗ(1+2+m=n).
2. Обратная задача 2-го рода (n, n*S). Распределение ходов (1+2+m); схема ОЗ(1+2+m=n).
3. Вековая задача с исходными данными (n=20, N=2020). Распределение ходов (1+k+m); схема ВЗ(1+ k+m=20).
4. Обратная задача 2-го рода (n, n*S). Распределение ходов (1+k+m); схема ОЗ(1+k+m=n).
5. Схемы Каталана (о них – во 2-й части);
6. Прочие схемы с тремя траекториями.

Исследуем первый частный случай – схему ВЗ(1+2+m = n). Такая конфигурация содержит 3 траектории – одну автономную (1 ход) и две зависимые (короткая – 2 хода и длинная – m ходов). Очевидно число решений задачи зависит от типа взаимодействия зависимых траекторий.

Основные типы взаимодействия траекторий:

1. Обструкция;
2. Перекрытие длинной траектории);
3. Перекрытие первого хода короткой траектории;
4. Перекрытие второго хода короткой траектории.

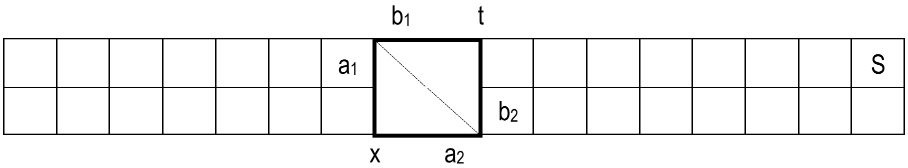
Эти четыре основных типа взаимодействия траекторий позволяют получить ещё 16 парных комбинаций (с учетом их следования): При этом надо ещё учесть, что протяженность зоны обструкции (или зоны перекрытия) также может варьироваться.

7. Математические модели решения вековой задачи В3(1+2+m=n).

1. Обструкция

Постановка задачи: построить модель вековой задачи Ser.h#n-N по схеме В3(1+2+m=n) при обструкции траекторий. Установить, при каких значениях n задача имеет решение.

Строим решетку размером 2×m с подвижной правой границей, зависящей от числа ходов в задании n = m+3. Обструкция отображается на решетке выделенным квадратом без внутренних границ (квадрат обструкции).
Сумма решетки зависит от двух параметров:
x – расстояние (в узлах) от левой границы до квадрата обструкции;
t – расстояние (в узлах) от правой границы до квадрата обструкции.



Вывод уравнения. Для подсчета суммы решетки применим принцип аддитивности. Для каждого из двух узлов, соединенных диагональю квадрата обструкции (линия сечения), подсчитаем его значение в прямом и обратном направлении. Два значения равны 1 ($a_2 = b_1 = 1$), а два других: $a_1 = C^2_{x+1}$ и $b_2 = C^2_{t+1}$. Сумма решетки S = a1 * 1 + 1 * b_2. $S = C^2_{x+1} + C^2_{t+1}$.
Решаем обратную задачу для вековой задачи: S = 101. 2*S = x(x+1) + t(t+1) = 202.
Мы получили нелинейное диофантово уравнение с двумя неизвестными.
Уравнение имеет два решения: x = 4, t = 13 и x = 13, t = 4. Отсюда можно найти n.
Длина решетки x+t+1 узлов. Число ходов на длинной траектории m = (x+t+1)-1 = 17, n = m+3 = 20.
Вывод: вековая задача Ser.h#n-N по схеме В3(1+2+m=n) при обструкции траекторий имеет решение только при n = 20.

Таблица 1**. Схема В3(1+2+m=n). Обструкция.**

№ решения	x	t	m	n
1	4	13	17	20
2	13	4	17	20

Как видим, решения симметричны относительно параметров x и t – проявление действия принципа обратимости.
Математическая модель решения вековой задачи с исходными данными (20, 2020), (x = 4, t = 13):

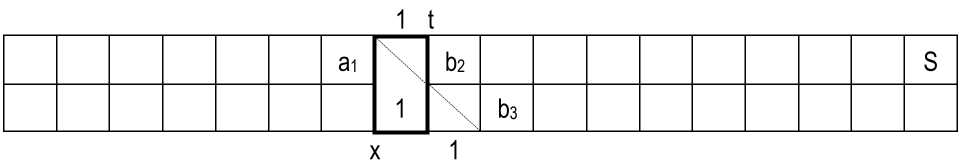
3	6	10	10	11	13	16	20	25	31	38	46	55	65	76	88	101
2	3	4		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

x t

Примечание: Увеличение зоны обструкции на d ходов приводит к увеличению на d числа ходов решения.
При этом сумма решетки сохраняет свое значение, и мы получаем модель вековой задачи с параметрами n+d и N = (n+d)*101.

2. Перекрытие длинной траектории

Постановка задачи: построить модель вековой задачи Ser.h#n-N по схеме В3(1+2+m=n) при перекрытии длинной траектории. Установить, при каких значениях n задача имеет решение.
Решение этой задачи ничем принципиально не отличается от решения предыдущей. Схема решетки:



Сечение содержит 3 узла. Сумма решетки $S = a_1 * 1 + 1 * b_2 + 1* b_3 = a_1 + b_2 + b_3$. $a_1 = C^2_{x+1}$ и $b_2 + b_3 = C^2_{t+1}$. И тогда $S = C^2_{x+1} + C^2_{t+1}$.
Решаем обратную задачу для вековой задачи: S = 101. 2*S = x(x+1) + t(t+1) = 202. Мы получили точно такое же нелинейное диофантово уравнение с двумя неизвестными, что и в случае обструкции. Уравнение имеет два решения: x = 4, t = 13 и x = 13, t = 4. Отсюда можно найти n. Длина решетки x+t узлов. Число ходов на длинной траектории m = (x+t)-1 = 16, n = m+3 = 19.
Вывод: вековая задача Ser.h#n-N по схеме В3(1+2+m=n) при перекрытии длинной траектории имеет решение только при n = 19.

Таблица 2. **. Схема В3(1+2+m=n). Перекрытие ДТ.**

№ решения	x	t	m	n
1	4	13	16	19
2	13	4	16	19

И здесь решения симметричны относительно параметров x и t.
Математическая модель решения вековой задачи с исходными данными (19, 1919), (x=4, t=13):

3	6	10	11	13	16	20	25	31	38	46	55	65	76	88	101
2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

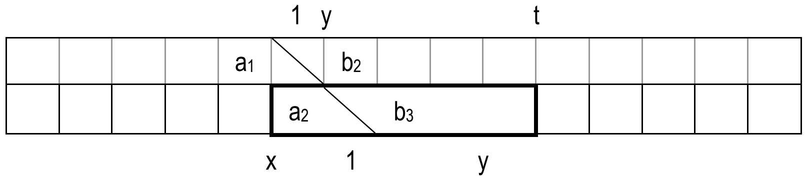
x t

3. Перекрытие первого хода короткой траектории

<u>Постановка задачи:</u> построить модель вековой задачи Ser.h#n-N по схеме В3(1+2+m=n) при перекрытии первого хода короткой траектории.

Строим решетку размером 2 × m с подвижной правой границей.

Зона перекрытия отображается на решетке выделенным прямоугольником без внутренних границ. Схема решетки:



Сумма решетки зависит от трех параметров:

x – расстояние (в узлах) от левой границы до зоны перекрытия;

y – расстояние (в узлах) между границами зоны перекрытия

t – расстояние (в узлах) от правой границы до зоны перекрытия.

Для подсчета суммы решетки применим принцип аддитивности. Сечение проходит через 3 узла.

$S = a_1 * 1 + a_2 * b_2 + 1 * b_3$ или $S = C^2_{x+1} + x*(t+y) + C^2_{t+1}$

Решаем обратную задачу при S = 101.

$2*S = x(x+1) + 2x(y+t) +t(t+1) = 202$.

Мы получили нелинейное диофантово уравнение с тремя неизвестными. $y = (202 – (x+t)*(x+t+1))/2x$

Решения уравнения представлены в таблице 3 ($m = x+y+t-1$, $n = m+3$, $x \geq 1$, $y \geq 1$, $t \geq 1$, $n < 100$).

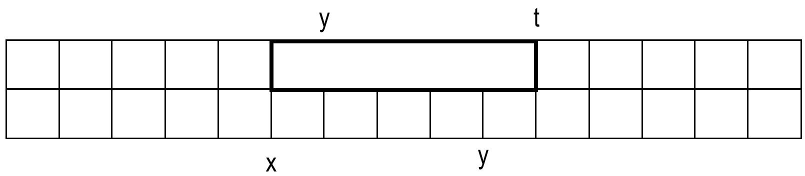
Таблица 3 **. Схема В3(1+2+m=n). Перекрытие КТ-1.**

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	4	4	5	5	5	5	7	7	8	10
y	91	86	80	73	65	56	46	35	23	10	43	40	28	23	5	20	14	16	13	7	2	8	5	7	1
t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	4	7	8	11	2	5	1	3	6	8	2	4	1	3
m	94	90	85	79	72	64	55	45	34	22	47	45	36	35	17	25	22	21	20	17	14	16	15	15	13
n	97	93	88	82	75	67	58	48	37	25	50	48	39	38	20	28	25	24	23	20	17	19	18	18	16

4. Перекрытие второго хода короткой траектории

<u>Постановка задачи:</u> построить модель вековой задачи Ser.h#n-N по схеме В3(1+2+m=n) при перекрытии второго хода короткой траектории.

Решение этой задачи ничем принципиально не отличается от решения предыдущей. Схема решетки:



Сумма решетки зависит от трех параметров:

x – расстояние (в узлах) от левой границы решетки до зоны перекрытия;

y – расстояние (в узлах) между границами зоны перекрытия

t – расстояние (в узлах) от правой границы решетки до зоны перекрытия.

Сумма решетки $S = C^2_{x+1} + t(y+x) + C^2_{t+1}$.

(Эта формула может быть получена из формулы $S = C^2_{x+1} + x(y+t) + C^2_{t+1}$ предыдущего пункта при помощи принципа обратимости).

Решаем обратную задачу (для вековой задачи) при S = 101. $x(x+1) + 2t*(x+y) +t(t+1) = 202$.

Мы получили нелинейное диофантово уравнение с тремя неизвестными. $y = (202 – (x+t)*(x+t+1))/2t$

Решения уравнения представлены в таблице 4 ($m = x+y+t-1$, $n = m+3$, $x \geq 1$, $y \geq 1$, $t \geq 1$, $n <100$).

Таблица 4. **Схема В3(1+2+m=n). Перекрытие КТ-2.**

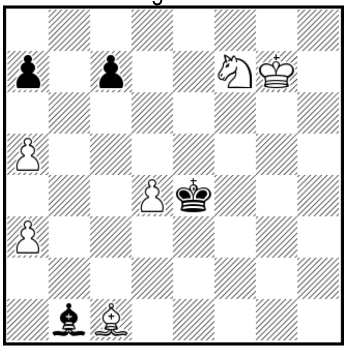
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	4	7	8	11	2	5	1	3	6	8	2	4	1	3
y	91	86	80	73	65	56	46	35	23	10	43	40	28	23	5	20	14	16	13	7	2	8	5	7	1
t	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	4	4	5	5	5	5	7	7	8	10
m	94	90	85	79	72	64	55	45	34	22	47	45	36	35	17	25	22	21	20	17	14	16	15	15	13
n	97	93	88	82	75	67	58	48	37	25	50	48	39	38	20	28	25	24	23	20	17	19	18	18	16

8. Примеры решения обратных задач.

1. Составить вековую задачу на серийный кооперативный мат Ser.h#20-2020.

№5. Эдуард Эйлазян

ChessblogYG 18.02.20



Ser.h #20-N 6+4

Решение №5. **1.c5 2.cd 3.-5.d1♖ 6-7.♖:a3 8.♖:a5 9.♖e5 10-14.a1♘ 15-17.♘g4 18-19.♗e6 20.♔f5 ♘d6#. N = 2020.**

Решение содержит 3 траектории: автономная ♔f5, и две связанные обструкцией на поле a2.
Параметры модели: x = 13, t = 4, m = x+t = 17, n = m+3 = 20, N = n*101 = 2020.

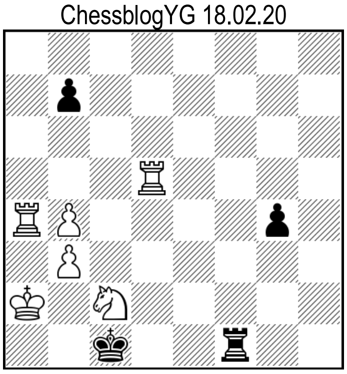
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	91	92	94	97	101
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		1	2	3	4
												x				t

Математическая модель: Вековая задача (1+2+m=n). Таблица 1, решение №2. N = 20*101 = 2020.

2. Составить вековую задачу на серийный кооперативный пат в 18 ходов Ser.h=18-1818.

№6. Эдуард Эйлазян

ChessblogYG 18.02.20



Ser.h=18-N 6+4

Решение №6. **1-3.g1♗ 4.♗d4 5-7.♔e4 8.♗e5 9-10.♔e6 11.♗d6 12-13.♔c6 14.♗c5 15.♔b5 16-17.♖b4 18.b6 ♘:b4** пат. **N = 1818.**

Решение содержит 3 траектории: автономная b6 и две связанные перекрытием второго хода короткой траектории.
Зона перекрытия – 5 ходов. Параметры модели: x = 4, y = 5, t = 7, m = x+y+t-1 = 15, n = m+3 = 18.

3	6	10	10	10	10	10	10	20	31	43	56	70	85	101
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
			x				y							t

Математическая модель: Вековая задача (1+2+m=n). Таблица 4, решение №23. N = 18*101 = 1818.

Обратные задачи в шахматной композиции
Часть 2

9. Схема Каталана. Классификация.

Продолжим исследование конфигураций, состоящих из трех траекторий – одной автономной и двух взаимозависимых. Интерес представляют такие конфигурации, в которых взаимодействующие траектории частично перекрываются, т.е. начальная часть первой траектории проходит по тем же полям доски, что и завершающая часть второй траектории. Конфигурацию такого вида будем называть схемой Каталана (см. Рис.1). (В частном случае автономная траектория может отсутствовать).

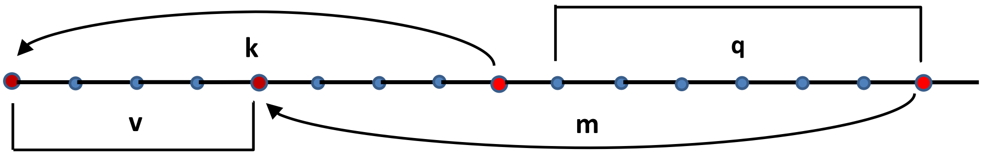


Рис.1. Схема Каталана

В схеме Каталана возникают положения, когда вторая фигура не может продолжить движение по своей траектории из-за блокировки поля первой фигурой.
На рис.1 показана схема Каталана, имеющая три независимых параметра: **k** – длина первой траектории, **m** – длина второй траектории и **q** – длина “свободной” (независимой) части второй траектории. Такие схемы будем обозначать **C(k, m, q).**
На параметры накладываются ограничения: $q < m \le k+q$. Параметр **v** выражается через независимые параметры $v = k+q+1-m$.
Для каждого набора значений параметров схемы C(k, m, q) можно построить решетку и вычислить ее сумму. В общем случае сумма вычисляется по биномиальным коэффициентам по формуле

$$S = C^{m}_{m+k} - C^{m-q-1}_{m+k} \qquad (1)$$

Например, при m = 6, k = 5 и q =2 получим $S = C^{6}_{11} - C^{3}_{11} = 462 - 165 = 297$.
Если длина автономной траектории – **a** ходов, то число ходов в решении задачи **n = a+k+m,** а число решений вычисляется по формуле

$$N = S * C^{a}_{n} \qquad (2)$$

Простая схема Каталана – частный случай схемы C(k, m, q) при q = 0 и m = k = p. Решетка этой схемы имеет сумму **S = C(p),** где C(p) – число Каталана. (Числа Каталана C(p) для p = 0, 1, 2, … образуют последовательность: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786...). Общая формула для чисел Каталана: **C(p) = (2p)!/p!(p+1)!** Рекуррентная формула: **C(p) = C(p-1) * (2(2p-1)/(p+1)).**
Числа Каталана легко вычисляются по треугольнику Паскаля: $\mathbf{C(p) = C^{p}_{2p} - C^{p-1}_{2p}}$.

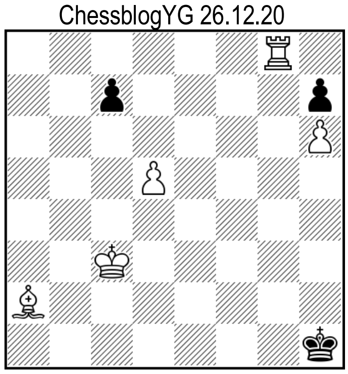
В общем случае конфигурация со схемой Каталана содержит 5 параметров – к описанным выше трем добавляются еще два: число ходов в автономной траектории и число строго единственных ходов зависимых траекторий за пределами зоны взаимодействия по схеме Каталана. Исследование таких схем в общем виде представляет определенные трудности и приводит к довольно громоздким, труднообозримым результатам. Поэтому ограничимся рассмотрением важного частного случая.

В простой схеме Каталана **C(p, p, 0)** при фиксированном значении **p** варьируются два параметра: **a** – число ходов в автономной траектории и **r** – число строгих ходов. Такие схемы будем обозначать **L(p, a, r).**
Для схемы L(p, a, r) сумма решетки **S = C(p),** а число решений вычисляется по формуле

$$N = C(p) * C^{a}_{n} \qquad (n = 2p+a+r) \qquad (3)$$

В задаче №7 реализована схема L(p, a, r) с параметрами p = 4, a = 2 и r = 6, т.е. L(4, 2, 6).

№7. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 26.12.20



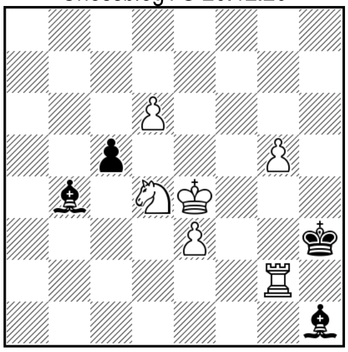
Ser.h#16-N? 5+3

Решение №7. **1-4.Kh5 5.Kxh6 6.Kh5 7-10.Kh1 11-14.h2 15.c6 16.cd Bxd5#. N = 1680.**
Конфигурация трех траекторий, две из которых взаимосвязаны блокировкой по схеме Каталана на вертикали h (пешка h7 и король).
Число решений находим по формуле $N = C(p) * C^{a}_{n} = C(4)*C^{2}_{16} = 14*120 = 1680$.

Схема C(k, m, q) реализована в задаче №8. Задача эта составлена по модели задачи №7 финского конкурса “ШО-64” 1994 года, т.е. является решением обратной задачи 1-го рода.

№8. Эдуард Эйлазян

ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#16-N 6+4

Решение №8**. 1-6.Kd7 7.Kxd6 8-11.c1R 12-13.Rf3 14-16.Kc3 Rc2#. N = 7888.**

Значения параметров находим путем сопоставления решения задачи со схемой на рис.1: C(k, m, q) = C(6, 10, 7).

Найдем число решений: N = $C^{m}_{m+k} – C^{m-q-1}_{m+k} = C^{10}_{16} – C^{2}_{16}$ = 8008 – 120 = 7888.

Для контроля можно построить решетку и найти ее сумму, применив принцип аддитивности:

7	28		8	7	6	5	4	3	2
6	21	56		28	21	15	10	6	3
5	15	35	70		56	35	20	10	4
4	10	20	35	56		69	34	14	4
3	6	10	15	21	28		48	14	
2	3	4	5	6	7	8			

S = $\Sigma a_{ii}*b_i$ = 28*1+56*8+70*28+56*56+28*69+8*48 = 7888.

10. Миллениум

В формулировке обратной задачи в жанре Ser.h#n-N (Ser.h=n-N) фигурируют исходные данные – пара чисел (n, N). При отсутствии каких-либо ограничений на исходные данные обратная задача теряет смысл. Это касается прежде всего параметра N – числа решений задачи. Так, при постановке “Вековой задачи” на исходные данные были наложены ограничения, а именно – функциональная связь N=101*n, где n и N – натуральные числа и n <100.

В общем случае условия относительно исходных данных могут быть заданы в произвольной форме, например, n и N – элементы заданного подмножества натуральных чисел, обладающих какими-нибудь интересными свойствами.

Постановка обратной задачи в общем виде: *составить шахматно-математическую задачу на серийный мат (пат), имеющую N решений, где N – элемент некоторого заданного подмножества W натуральных чисел.*

В частности, заданное подмножество натуральных чисел может быть представлено одним числом, набором чисел, оно может быть задано числовым рядом или описано атрибутивным свойством своих элементов (фигурные числа, “круглые” числа (кратные 10-ти), палиндромы, репьюниты, репдиджиты, числа Смита, числа Фибоначчи, числа Каталана и т.д.)

По аналогии с “Вековой задачей” можно ввести название особого класса задач: “Задача тысячелетия” или “Миллениум”. *Миллениум* – это задача на серийный кооперативный мат (или пат) типа Ser-h#n-N (или Ser-h=n-N), где число решений N представимо в виде N = d*1001 (1 ≤ d ≤ 999). В данном случае W – множество чисел вида N = d*1001 (1 ≤ d ≤ 999).

Если число решений N откладывать на шкале летоисчисления, то “миллениум” будет встречаться раз в тысячу лет.
На число ходов решения n не будем накладывать никаких жестких ограничений, по крайней мере, не будем связывать его с числом решений N. Как и в случае вековой задачи, здесь можно выделить две формы постановки обратной задачи: в первом случае требуется составить задачу-миллениум без каких-либо дополнительных ограничений, во втором – задачу-миллениум требуется составить при заданном значении N.

План решения:

1) Проводим предварительный анализ исходных данных задачи;
2) Выбираем конфигурацию траекторий, используя результаты предварительного анализа;
3) Определяем значения параметров конфигурации траекторий;
4) По построенной математической модели составляем шахматную задачу-миллениум.

Пусть требуется решить обратную задачу типа Ser-h#n-N при заданном значении N = 20020.

Разложим N на простые множители N = 20020 = 2*2*5*7*11*13. Или

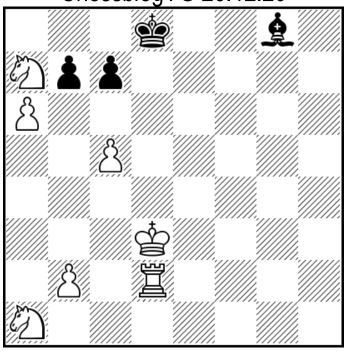
$$N = 10*2002 = 11*1820 = 13*1540 = 14*1430 = 20*1001 \quad (4)$$

Допустим, что искомая конфигурация траекторий содержит одну автономную одноходовую траекторию и две взаимозависимые. Тогда в разложении (4) первый сомножитель можно трактовать как число ходов в решении, а второй – как сумму S решетки, составленной для взаимозависимых траекторий. Успех в решении поставленной задачи определяется удачным выбором вида конфигурации.

Проверим пригодность схемы Каталана C(k, m, q) для решения поставленной задачи.

Выберем одно из разложений (4), например, N = 14*1430 (примечательно, что оба сомножителя – числа Каталана!).
Из соотношения n = a+k+m при n = 14 и a = 1 получим k+m = 13. Тогда согласно формуле (1) $S = C^{m}_{m+k} – C^{m-q-1}_{m+k}$ мы получим диофантово уравнение относительно m и q: $C^{m}_{13} – C^{m-q-1}_{13} = 1430$.
Решение можно найти подбором при ограничениях q < m ≤ 13 - m+q. Решение уравнения: m = 6, k = 7, q = 2.
Проверка: $S = C^{m}_{m+k} – C^{m-q-1}_{m+k} = C^{6}_{13} – C^{3}_{13} = 1716 – 286 = 1430$. N = 14*S = 14*1430 = 20020.
Значения параметров конфигурации траекторий найдены: C(k, m, q) = C(7, 6, 2).
По построенной математической модели составляем шахматную задачу-миллениум Ser.h#14-20020.

№9. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#14-N 7+4

Решение №9:
1.bxa6 2.a5 3.a4 4.a3 5.axb2 6.b1R 7.Rb4 8.c6 9.Kc7 10.Kb7 11.Ka6 12.Ka5 13.Ka4 14.Ba2 Rxa2#. N = 20020.

11. Палиндром

Рассмотрим разновидность обратных задач 2-го рода Ser.h#n-N (или Ser.h=n-N), в которых число решений N представляет собой палиндром. В данном случае W – множество числовых палиндромов. На конфигурацию траекторий решения пока не будем накладывать никаких ограничений. Требование палиндромности числа решений N является довольно жестким условием – ведь среди многозначных натуральных чисел палиндромы встречаются не так уж часто. В связи с этим отказ от требования палиндромности числа ходов в решении n представляется вполне естественным.

Поскольку термин «палиндром» применяется не только в математике, но и в химии, биологии, литературе, музыке, изобразительном искусстве, то мы не сильно погрешим против терминологической точности, если шахматные задачи с палиндромным числом решений также будем называть *палиндромами.* Задачу, в которой оба числа n и N – палиндромы, будем называть *совершенным палиндромом.*
Пусть требуется составить задачу-палиндром. Для решения обратной задачи 2-го рода удобно использовать схемы с варьируемыми параметрами. При этом может быть дополнительно задано либо число ходов в решении n, либо конкретное число решений N.
Продемонстрируем один из возможных подходов к решению этой задачи, основанный на использовании описанных выше схем Каталана.

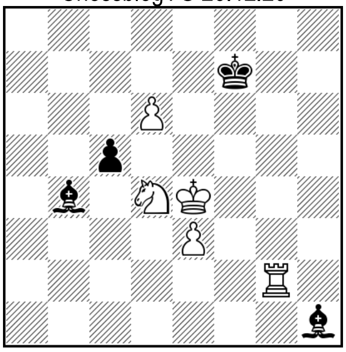
1. Схема C(k, m, q). Непосредственные вычисления по формуле (1) в диапазоне изменения параметров 0 ≤ q ≤ 11, 1 ≤ k ≤ 50, 1 ≤ m ≤ 12 дают порядка 43-х моделей задач с полиндромным числом решений. Некоторые из этих решений с параметрами модели представлены в таблице 5.

Таблица 5. **Палиндромы. Схема C(k, m, q)**

	Номер модели																				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
k	9	22	29	30	44	18	30	11	17	29	11	12	31	5	8	6	6	5	4	3	3
m	2	2	2	2	2	4	5	2	4	5	3	3	4	5	4	6	8	8	8	11	12
q	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	7	10	11
n	11	24	31	32	46	22	35	13	21	34	14	15	35	10	12	12	14	13	12	14	15
N	44	252	434	464	989	5775	272272	77	5775	272272	363	454	52325	242	494	858	2002	1001	494	363	454

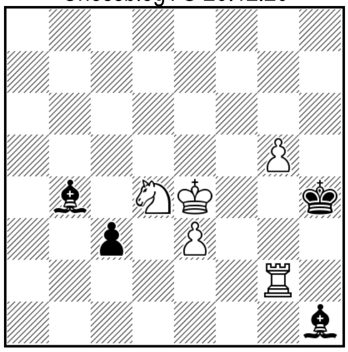
Пусть дополнительно задано число ходов n = 12. В таблице 5 находим три модели с таким значением параметра n.
Это модели № 15, №16 и №19.
В качестве исходной шахматной схемы для иллюстрации можно взять схему задачи №8.
Как мы знаем, параметры схемы C(k, m, q) связаны соотношением v = k+q+1-m. Здесь величина v принимает значение v = 4, и нам надо проверить для каждой модели выполнение соотношения m+3 = k+q. Для модели №15 C(k, m, q) = (8, 4, 3), 4+3≠8+3.
Для модели №16 C(k, m, q) = C(6, 6, 3), 6+3 = 6+3. И для модели №19 C(k, m, q) = C(4, 8, 7), 8+3 = 4+7.
Следовательно, по двум моделям – №16 и №19 – можно составить задачи-палиндромы в 12 ходов.
Задача №10 составлена по модели №16, а задача №11 – по модели №19.

№10. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#12-N 5+4

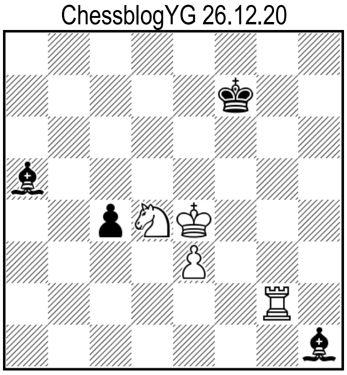
№11. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#12-N 5+4

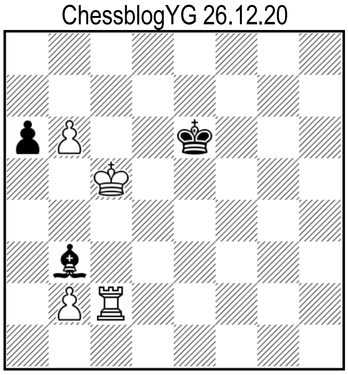
Решение №10. **1-2.Kd7 3.Kxd6 4-7.c1R 8-9.Rf3 10-12.Kc3 Rc2#. N = 858.**
Проверка. Здесь C(k,m,q) = C(6, 6, 3). Число решений N = S = $C^{m}_{m+k} – C^{m-q-1}_{m+k}$ = 924 – 66 = 858.
Решение №11. **1-7.Kc4 8-9.c1R 10-11.Rf3 12.Kc3 Rc2#. N = 494.**
Проверка. Здесь C(k,m,q) = C(4, 8, 7). Число решений N = S = $C^{m}_{m+k} – C^{m-q-1}_{m+k}$ = 495 – 1 = 494.
В таблице №5 есть две модели совершенных палиндромов – это модель №1 C(9,2,0) с исходными данными (n = 11, N = 44) и модель №6 C(18,4,0) с исходными данными (n = 22, N = 5775).
Интерес представляет и модель №14 с числом ходов n = 10. Попробуем её реализовать с автономной одноходовой траекторией.
Схема Каталана C(k,m,q) = C(5,5,3). Число решений находим по формуле (2): N = C^{1}_{n} * S = 11*242 = 2662.
Число ходов с учетом автономной одноходовой траектории n = 11, число решений N = 2662. Получился совершенный палиндром!

№12. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 26.12.20



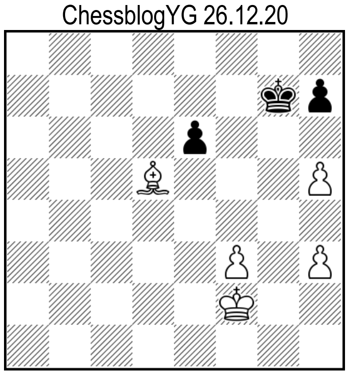
Ser.h#11–N 3+4

№13. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#11–N 4+3

№14. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#13-N 5+3

Решение №12.
1.Ke7 2.Kd6 3.Kc5 4.c3 5.c2 6.c1R 7.Rf1 8.Rf3 9.Kc4 10.Kc3 11.Bb4 Rc2#. N = 2662.
А вот ещё одна реализация той же математической модели C(k,m,q) = C(5,5,3), но с иной шахматной схемой:
Решение №13.
1.Kd7 2.Kc8 3.Kb7 4.a5 5.a4 6.a3 7.axb2 8.b1R 9.Ka6 10.Ka5 11.Ba2 Rxa2#. N = 2662.
Число ходов n = 11, число решений N = 2662. Совершенный палиндром!

2. Схема L(p, a, r). Вычисления по формуле N = C(p) * C^{a}_{n} (n = 2p+a+r) в диапазоне изменения параметров 2 ≤ p ≤ 5, 1 ≤ a ≤ 5, 0 ≤ r ≤ 30 дают 13 моделей задач с полиндромным числом решений (табл. 6).

Таблица 6. **Палиндромы. Схема L(p, a, r)**

	Номер модели												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
p	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	5	5
a	2	4	4	5	5	5	2	4	1	1	3	2	2
r	11	2	7	2	7	8	7	4	9	22	2	0	25
n	17	10	15	11	16	17	15	14	18	31	13	12	37
N	272	252	2002	252	4004	6006	525	5005	252	434	4004	2772	27972

Пусть требуется составить задачу-палиндром на серийный кооперативный мат в 13 ходов.
По таблице 6 выбираем модель с числом ходов n = 13.
Число решений находим по формуле (3): N = C(p) * C^{a}_{n} = C(4)*C^{3}_{13} = 14*286 = 4004.
По модели №11 L(4, 3, 2) составляем задачу №14.
Решение №14.
1.Kh6 2.Kxh5 3.Kh4 4.Kxh3 5.Kh2 6.Kh1 7-10.h2 11-12.e4 13.ef Bxf3#. N = 4004.

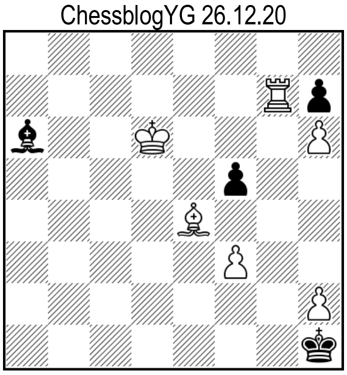
12. Форма Неймана

Прежде чем двигаться дальше, рассмотрим более детально, что представляет собой запись решения задачи типа Ser.h#n-N. Каждое отдельно взятое решение из множества решений N записывается в виде последовательности ходов черных с финальным матующим ходом белых: (a_1 a_2 a_3 … a_n w#). Любое другое решение записывается теми же ходами, но в иной последовательности (при этом очередность ходов, относящихся к одной траектории, сохраняется!). Вся совокупность решений задачи Ser.h#n-N есть некоторое подмножество перестановок из n ходов набора $\{a_i\}$. Такой набор ходов будем называть *базисом* решения. В некоторых случаях задача Ser.h#n-N может иметь два (и более) различных базиса $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, каждый из которых дает свою совокупность решений в количестве N1 и N2 соответственно. Важно, чтобы оба базиса содержали одинаковое число ходов, а число решений для каждого базиса, вообще говоря, может быть различным. Будем считать, что в этом случае общее число решений N задачи есть сумма решений по двум базисам, т.е. N = N1 + N2.

Как известно, структура решения задачи на кооперативный мат задается формулой решения. Так, например, форма Доусона определяется формулой M. N. 1. 1., форма Оницию – формулой 1. N. 1. 1. Самая простая формула у формы Неймана – N. 1. 1. 1. Можно ли применить такой подход к задачам на серийный кооперативный мат типа Ser.h#n-N? Понятно, что прямой перенос здесь не работает. Когда задача имеет множество решений, говорить о какой-либо формуле, например N. 1. 1. 1., уже не имеет смысла.

Для того, чтобы не вводить новых терминов, задачи типа Ser.h#n-N с двумя (и более) *базисами* будем называть задачами *в форме Неймана*, но без привязки к какой-либо формуле. При этом в задании указывается число базисных решений, например, Ser.h#12-N, 2 sol. (Во избежание недоразумений уточним, что в данном случае термин связан с именем математика Джона фон Неймана, заложившего основы математической теории игр и, в частности, теории кооперативных игр.)

№15. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#16-N? 2 sol. 6+4

Решение №15.

A: 1.Kxh2 2.Kh3 3.Kh4 4.Kh5 5.Kxh6 6.Kh5 7.Kh4 8.Kh3 9.Kh2 10.Kh1 11.h5 12.h4 13.h3 14.h2 15.Be2 16.Bxf3 Bxf3#.

Число решений по первому базису вычисляем по формуле (2): $N1 = C(p) * C^a_n = C(4) * C^2_{16} = 14 * 120 = 1680$.

B: 1.Be2 2.Bxf3 3.Bg2 4.f4 5.f3 6.f2 7.f1N 8.Nxh2 9.Ng4 10.Nxh6 11.Ng8 12.h5 13.h4 14.h3 15.h2 16.Bf3 Bxf3#.

Второй базис состоит из двух взаимосвязанных траекторий. Число решений по второму базису вычисляем по решетке: N2 = 40. (Построение решетки трудностей не вызывает.)

1 – pf5
2 – Ba6

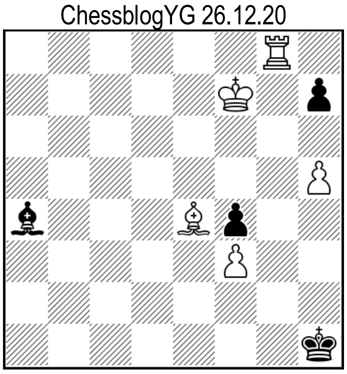
2 └ 1

		4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3											
2											

Общее число решений **N = N1 + N2 =1680 + 40 = 1720.**

Вот ещё одна вариация на ту же тему.

№16. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#14-N? 2 sol. 5+4

Решение №16.

A: 1.Kh2 2.Kh3 3.Kh4 4.Kxh5 5.Kh4 6.Kh3 7.Kh2 8.Kh1 9.h5 10.h4 11.h3 12.h2 13.Bd1 14.Bxf3 Bxf3#.

$N1 = C(p) * C^a_n = C(4) * C^2_{14} = 14 * 91 = 1274$.

B: 1.Bd1 2.Bxf3 3.Bg2 4.f3 5.f2 6.f1N 7.Ng3 8.Nxh5 9.Nf6 10.h5 11.h4 12.h3 13.h2 14.Bf3 Bxf3#.

N2 = 9 (находим по решетке).

Общее число решений **N = N1+ N2 = 1274 + 9 = 1283.**

13. Обратные задачи в форме близнецов

В шахматной композиции близнецами называют задачи, которые имеют сходные начальные позиции, но разные решения. Позиции близнецов рассматриваются в совокупности как одно произведение, содержащее оригинальную идею. Считается, что представление авторского замысла в форме близнецов является одним из способов расширения содержания композиции.

В связи с этим возникает естественный вопрос: можно ли при решении обратной задачи типа Ser.h#n-N использовать форму близнецов? Да, можно, но при этом надо учитывать специфику жанра. При решении обратной задачи должно быть выполнено главное требование, а именно, число решений N шахматной задачи должно принадлежать некоторому наперед заданному подмножеству натуральных чисел W. Эстетические требования, предъявляемые к шахматному содержанию задач, хоть и являются достаточно важными, но всё же имеют второстепенное значение.

Поэтому решением обратной задачи Ser.h#n-N в форме близнецов будем считать набор d задач-близнецов Ser.h#n-N_r, где N_r – произвольные натуральные числа, сумма которых равна N, т.е. $N_1 + N_2 + \ldots + N_d = N \in W$.

Пусть, например, требуется составить в форме близнецов задачу-палиндром с исходными данными (11, N).

Для решения этой обратной задачи воспользуемся схемой Каталана C(k, m, q) с двумя траекториями.

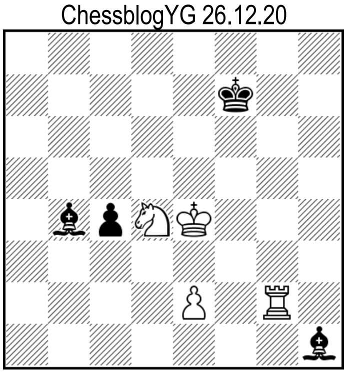
Надо найти параметры k, m и q для каждого близнеца. Нам известно, что n = k+m = 11, а сумма решений N1+ N2 = N – палиндром.

Число решений каждого близнеца вычисляется по формуле (1) $N_r = S = C^{m}_{m+k} - C^{m-q-1}_{m+k}$ $(q < m \le k+q)$.

Варьируя значения параметров схемы Каталана при указанных ограничениях, находим подходящие схемы: C(6,5,3) и C(6,5,2).

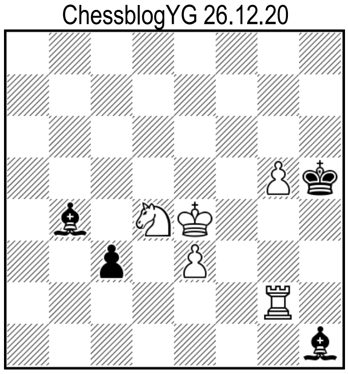
Воспользуемся шахматной схемой задачи №10.

№17. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#11–N b) pe2→e3, pc4→c5

№18. Эдуард Эйлазян
ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#11-N b) pc3→c2, Kh5→h4

Решение №17.

a) 1.Ke7 2.Kd6 3.Kc5 4.c3 5.c2 6.c1N 7.Nxe2 8.Ng1 9.Nf3 10.Kc4 11.Kc3 Rc2#.

Схема Каталана C(k,m,q) = C(6,5,3).

Число решений первого близнеца: $N1 = S = C^{m}_{m+k} - C^{m-q-1}_{m+k} = C^{5}_{11} - C^{1}_{11} = 462 - 11 = 451$.

b) 1.Ke7 2.Kd6 3.c4 4.c3 5.c2 6.c1R 7.Rf1+ 8.Rf3 9.Kc5 10.Kc4 11.Kc3 Rc2#.

Схема Каталана C(k,m,q) = C(6,5,2).

Число решений второго близнеца: $N2 = S = C^{m}_{m+k} - C^{m-q-1}_{m+k} = C^{5}_{11} - C^{2}_{11} = 462 - 55 = 407$

Общее число решений: **N = N1+N2 = 451 + 407 = 858** – палиндром.

Еще один пример на ту же тему и с той же шахматной схемой.

Решение №18.

a) 1.Kg6 2.Kf7 3.Ke7 4.Kd6 5.c2 6.c1R 7.Rf1 8.Rf3 9.Kc5 10.Kc4 11.Kc3 Rc2#.

В первом близнеце мы имеем схему Каталана C(k,m,q) = C(4,7,6).

Число решений первого близнеца: $N1 = S = C^{7}_{11} - C^{0}_{11} = 330 - 1 = 329$.

b) 1.c1R 2.Rf1 3.Rf3 4.Kh5 5.Kg6 6.Kf7 7.Ke7 8.Kd6 9.Kc5 10.Kc4 11.Kc3 Rc2#.

Решение второго близнеца состоит из двух автономных траекторий длиной 3 хода и 8 ходов соответственно.

Число решений N2 вычисляется по решетке (см. “Вычисления на решетках. Два основных принципа”, часть 1), N2 = 165.

Общее число решений: **N = N1 + N2 = 329 + 165 = 494** – палиндром.

14. Обратная задача в жанре серийных обратных матов

В задачах на серийный обратный мат белые делают серию n ходов и вынуждают черных поставить мат в 1 ход.

По аналогии с кооперативным жанром здесь также допустимы постановки задач различных типов:

S#n	- обратный мат.
Ser.s#n	- серийный обратный мат.
Ser.s#n-N?	- серийный обратный мат (множественность решений; надо найти число решений N).
Ser.s#n-N	- обратная задача: составить задачу на серийный обратный мат в n ходов с числом решений N, принадлежащим заданному подмножеству W натуральных чисел.

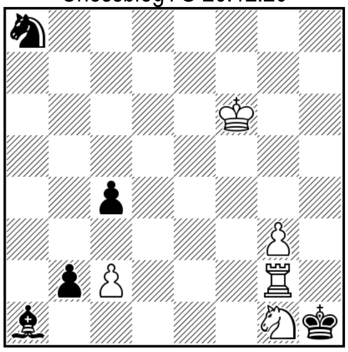
Рефлексный мат – разновидность обратного мата. В задачах на рефлексный мат любая из сторон обязана дать мат королю соперника в один ход при первой возможности. Для расширения содержания в таких задачах часто используются ложные следы, в которых давать мат вынуждены белые. Нас будет интересовать постановка и решение обратной задачи в жанре серийных обратных матов и, в частности, серийных рефлексных матов Ser.r#n-N.

Перейдем к конкретным примерам.

Задача №19 - вековая задача с исходными данными n = 20 и N = 2020. При её составлении была использована математическая модель задачи №4 Ser.h #20-2020 (часть 1). Обратная задача 1-го рода.

№19. Эдуард Эйлазян

ChessblogYG 26.12.20



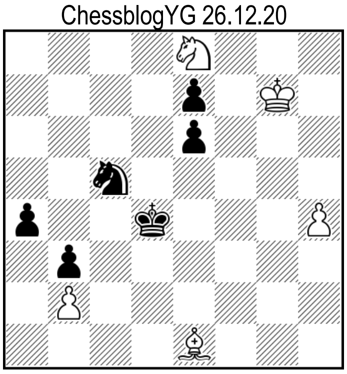
Ser.s#20–N 5+5

Решение №19. **1.g4 2.g5 3.g6 4.g7 5.g8B 6.Bxc4 7.Bg8 8.c4 9.c5 10.c6 11.c7 12.c8B 13.Kg7 14.Bb7 15.Nh3 16.Kh8 17.Bxa8 18.Be4 19.Bh7 20.Rxb2 zz Bxb2#. N = 2020.**
Конфигурация траекторий решения состоит из трех траекторий: одной автономной (Nh3) и двух взаимосвязанных (ходы белого короля и остальные 17 ходов; обструкция на поле g7). Число решений N = 101 * 20 = 2020.

Следующие две задачи – вековые задачи на рефлексный мат с исходными данными n = 20 и N = 2020.

№20. Эдуард Эйлазян

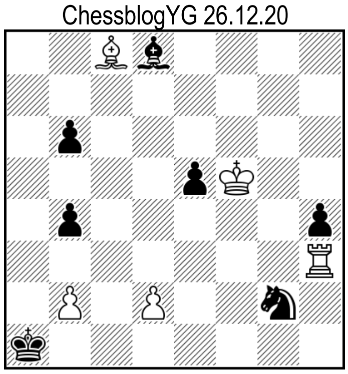
ChessblogYG 26.12.20



Ser.r#20-N 5+6

№21. Эдуард Эйлазян

ChessblogYG 26.12.20



Ser.r#20-N 5+7

Решение №20.
1.h5 2.h6 3.h7 4.h8R 5.Rh3 6.Rxb3 7.Rf3 8.Bh4 9.b3
[или 9.Bxe7 10.b3 11.bxa4 12.a5 13.a6 14.a7 15.a8B! (но не 15.a8Q? 16.Qc8 17.Qxe6 18.Qg8 19.Rf7 20.Kf8 Ne6# из-за 18.Bf6#! рефлексный мат черным) 16.Bd5 17.Bxe6 18.Bg8 19.Rf7 20.Kf8 Ne6#]
10.bxa4 11.a5 12.a6 13.a7 14.a8B
[но не 14.a8Q? 15.Qc8 16.Qxe6+ 17.Qg8 18.Bxe7 19.Rf7 20.Kf8 Ne6# из-за 17.Bf2#! рефлексный мат черным]
15.Bd5 16.Bxe6 17.Bg8 18.Rf7 19.Bxe7 20.Kf8 Ne6# рефлексный мат белым. **N = 2020.**
Конфигурация траекторий решения состоит из трех траекторий: одной автономной (Kf8) и двух взаимосвязанных (два хода слона и остальные 17 ходов; блокировка на поле a4 и перекрытие на том же поле).
Число решений найдем по решетке.

	3	6	10	11	13	16	20	25	31	38	46	55	65	76	88	101
1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

С учетом автономной траектории получим число решений N = 20*101 = 2020.

Ещё одна вековая задача №21 на серийный рефлексный мат составлена по математической модели задачи №5 (см. часть 1).
Обратная задача 1-го рода.
Решение №21.
1.d4 2.dxe5 3.e6 4.e7 5.e8R 6.Re6 7.Rxb6 8.Rxb4 9.Rf4 10.Kg4 11.b4 12.b5 13.b6 14.Bb7 15.Bf3!
(но не 15. Be4? 16.b7 17.b8R 18.Rb5 19.Rh5 20. Bf3 Ne3# из-за 18.Ra3# рефлексный мат черным)
16.b7 17.b8N (17.b8R? 18.Ra4#**) 18.Nd7 19.Nf6 20.Nh5 Ne3#** рефлексный мат белым. **N = 2020.**
Конфигурация из трех траекторий: одна автономная и две взаимосвязанные – обструкция на поле b7.
Вековая задача (1+2+m = n). Таблица 1, решение №2 (часть 1).
Параметры модели: x = 13, t = 4, m = x+t = 17.
Число ходов n = m+3 = 20. Число решений N = 20*101 = 2020.

15. Комплексные формы

1. Сочетание различных ограничений на число решений N.

Мы рассмотрели несколько вариантов выбора множества W, которому должно принадлежать число решений задачи: вековая, миллениум, палиндром. Но мы можем наложить на W более жесткие ограничения, а именно, потребовать, чтобы выполнялись одновременно два условия для всех элементов этого множества: $W = W_1 \cap W_2$.

Так, например, можно сформулировать задание: составить задачу *миллениум-палиндром* в жанре Ser.h#n-N. Для решения поставленной задачи необходимо выбрать удобную математическую модель, уточнить значения параметров модели, при которых число решений N удовлетворяет заданным условиям, и составить шахматную задачу.

Ясно, что число решений N должно иметь вид abaaba или aa0aa или a00a. В таблице 5 “Палиндромы. Схема C(k, m, q)” есть модели с подходящими значениями N – это №№ 7, 10, 17, 18. Но модели №17 и №18 малоинтересны для разработки, а в моделях №7 и №10 значение параметра **n** слишком велико – 35 ходов и 34 хода соответственно.

Тем не менее, число 272272 представляется достаточно перспективным для разработки.

Разложим его на множители: $272272 = 7*11*13*16*17 = 1001*16*17 = 2002*(17*16)/2 = 2002*C^2_{17}$.

Для выбора модели решения задачи используем схему Каталана C(k, m, q). Варьируя параметры этой схемы получим:

S = 1001 для C(9,5,0), C(8,6,0), C(8,5,1), C(7,6,1), C(6,7,2), C(6,8,2), C(5,8,4), C(5,9,4);

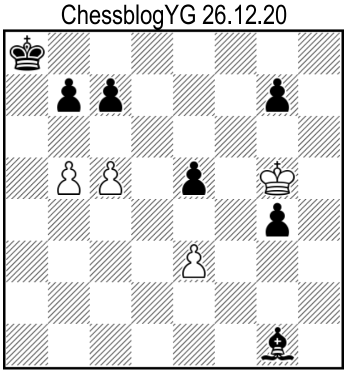
S = 2002 для C(9,6,0), C(8,6,1), C(6,8,3), C(6,9,3).

Из этих 12 моделей выберем те, для которых параметр v = 1, т.е. k+q = m. Останутся три модели: C(6,8,2), C(5,9,4) и C(6,9,3).

Первая модель C(6,8,2) реализована в задаче №22.

№22. Эдуард Эйлазян

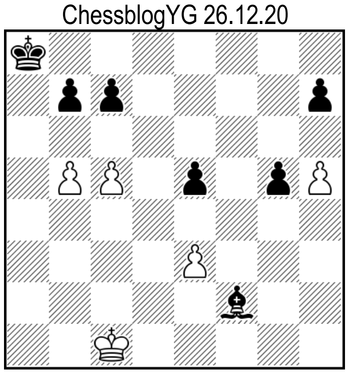
ChessblogYG 26.12.20



Ser.h=17–N 4+7

№23. Эдуард Эйлазян

ChessblogYG 26.12.20



Ser.h=17–N 5+7

Решение №22.

1.Bf2 2.Be1 3.Ba5 4.Bb6 5.Ba7 6.Bb8 7.g3 8.g2 9.g1B 10.Bf2 11.Be1 12.Ba5 13.Bb6 14.B6a7 15.b6 16.e4 17.g6 c6 пат. **N = 272272.**

Конфигурация траекторий решения содержит две взаимосвязанные по схеме Каталана траектории и две автономные одноходовые траектории. Число ходов решения n = 6+8+1+1+1 = 17 (мы учли число ходов в схеме Каталана, строго единственный ход за пределами зоны Каталана и два автономных хода).

Число решений $N = S*(n-1)*n$; $S = C^m_{m+k} - C^{m-q-1}_{m+k} = C^8_{14} - C^5_{14} = 3003 - 2002 = 1001$; $N = 1001*16*17 = 272272$ – миллениум-палиндром.

Вторая модель C(5,9,4) реализована в задаче №23 (для наглядности использована та же шахматная схема).

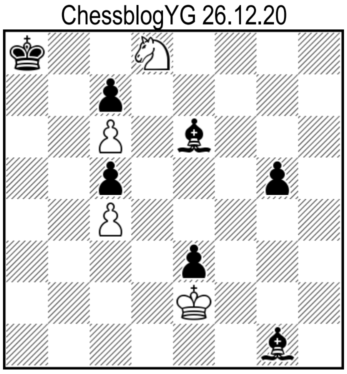
Решение №23. **1.Be1 2.Ba5 3.Bb6 4.Ba7 5.Bb8 6.g4 7.g3 8.g2 9.g1B 10.Bf2 11.Be1 12.Ba5 13.Bb6 14.B6a7 15.b6 16.e4 17.h6 c6** пат.

Число решений $N = S*(n-1)*n$; $S = C^m_{m+k} - C^{m-q-1}_{m+k} = C^9_{14} - C^4_{14} = 2002 - 1001 = 1001$; **N = 1001*16*17 = 272272.**

Третья модель C(6,9,3) реализована в задаче №24.

№24. Эдуард Эйлазян

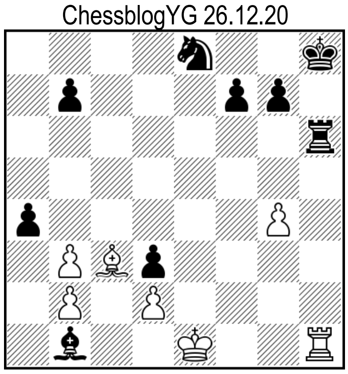
ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#17–N 4+6

№25. Эдуард Эйлазян

ChessblogYG 26.12.20



Ser.h=19–N 7+9

Решение №24. **1.Bf2 2.Be1 3.Ba5 4.Bb6 5.Ba7 6.Bb8 7.g4 8.g3 9.g2 10.g1B 11.Bf2 12.Be1 13.Ba5 14.Bb6 15.B6a7 16.Bc8 17.Bb7 cxb7#. N = 272272** – миллениум-палиндром.

Число решений $N = S*C^2_{17}$; $S = C^m_{m+k} - C^{m-q-1}_{m+k} = C^9_{15} - C^5_{15} = 5005 - 3003 = 2002$; $C^2_{17} = 136$; $N = 2002*136 = 272272$.

Еще одно интересное число для разработки N = 171171. $171171 = 19*3*3*1001 = 1001*(19*18)/2 = 1001*C^2_{19} = S * C^2_{19}$.

Здесь S – сумма решетки для схемы Каталана C(6,8,2) (см. решение задачи №22).

Решение №25. **1.Bc2 2.Bd1 3.Bf3 4.Be4 5.Bh7 6.Bg8 7.a3 8.axb2 9.b1B 10.Bc2 11.Bd1 12.Bf3 13.Be4 14.Beh7 15.Rf6 16.g5 17.Ng7 18.b5 19.b4 Bxf6** пат. **N = 171171** – миллениум-палиндром

Число решений $N = S*C^2_{19}$; $S = C^8_{14} - C^5_{14} = 3003 - 2002 = 1001$; $C^2_{19} = 171$; $N = 1001*171 = 171171$.

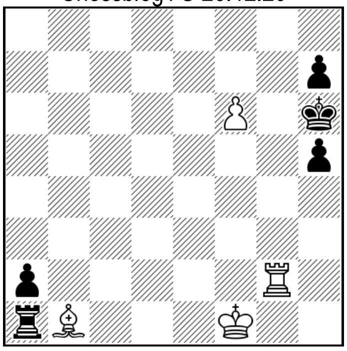
2. Различные сочетания формы решения и допустимых значений N (N ∈ W).

2.1. Задачи в форме Неймана

Пусть требуется решить обратную задачу Ser.h#n-N при условии, что N – палиндром, а само решение содержит два базиса, т.е. представлено в форме Неймана. В задаче №26 оба условия выполнены.

№26. Эдуард Эйлазян

ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#11-N, 2 sol 4+5

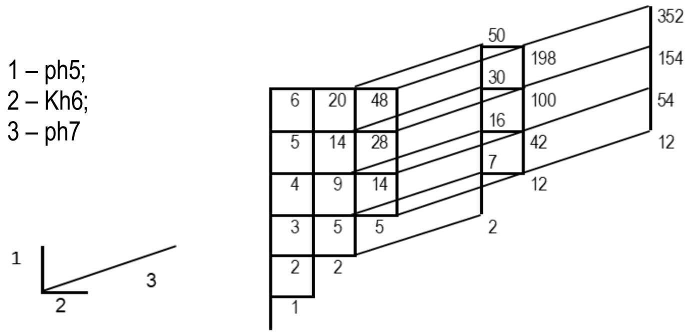
Решение №26.

A. 1.h4 2.h3 3.h2 4.h1N 5.Nf2 6.Nd1 7.Kh5 8.Kh4 9.Kh3 10.h5 11.h4 Bf5#.

B. 1.h4 2.h3 3.h2 4.h1N 5.Nf2 6.Ng4 7.Kg5 8.h5 9.Kh6 10.Nxf6 11.Nh7 Rg6#.

Для подсчета числа решений в базисе **A** строим трехмерную решетку:

1 – ph5;
2 – Kh6;
3 – ph7

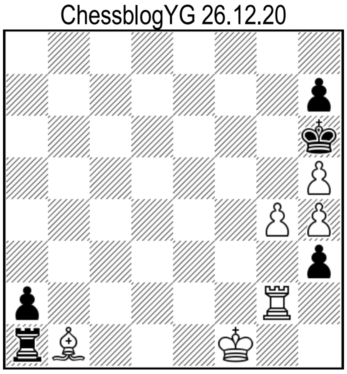


Число решений в базисе **A** равно N1 = 352.

В базисе **B** строго единственное решение: N2 = 1. Общее число решений **N = N1+ N2 = 353** – палиндром.

№27. Эдуард Эйлазян

ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#11-N, 2 sol 6+5

Решение №27.

A: 1.h2 2.h1N 3.Nf2 4.Nxg4 5.Kxh5 6.Kxh4 7.Kg5 8.h5 9.Kh6 10.Nf6 11.Nh7 Rg6#.

B: 1.h2 2.h1N 3.Nf2 4.Nxg4 5.Nf2 6.Nd1 7.Kxh5 8.Kxh4 9.Kh3 10.h5 11.h4 Bf5#.

Для подсчета числа решений в базисах **A** и **B** строим решетки. Получаем N = N1+N2 = 42+2 = 44. **N = 44** – палиндром.

А если учесть, что n = 11, то это – совершенный палиндром, более того, число ходов и число решений задачи представлены числами, которые имеют специальные названия – репюнит и репдиджит.

Репьюнит – натуральное число, записанное с помощью одних только единиц.

Репдиджит – натуральное число, в записи которого все цифры одинаковые.

2.2. Задачи в форме близнецов.

Пусть поставлена обратная задача Ser.h#n-N с заданным множеством W допустимых значений N. Требуется решить задачу в форме близнецов.

В шахматной композиции используются различные способы образования близнецов. Самый простой и распространенный способ – указать минимальные изменения в заданной позиции [напр., a) diagr, b) Kd5→e5]. Есть еще продолженные задачи (выполнение того же или нового задания в процессе решения исходной позиции), есть последовательные близнецы (каждая новая позиция образуется из предыдущей), есть близнецы с зеро-позицией, изменения которой приводят к образованию близнецов.

Постановка задачи -1: *решить обратную задачу Ser.h#n-N в форме близнецов при условии, что N – миллениум.*

Сразу возникает вопрос: какой способ образования близнецов является самым эффективным в данном случае?

Ответ: комбинированный! Это и ‘зеро-позиция’, и ‘продолженные задачи’ и ‘последовательные близнецы’.

Причина высокой эффективности этого способа кроется, видимо, в свойствах чисел-миллениумов.

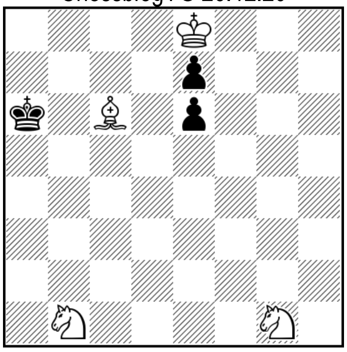
Задачу решаем в 3 этапа.

1-й этап. Решаем обратную задачу Ser.h#n-N, где N – миллениум (см. раздел 10).

При составлении задачи №28 была использована схема Каталана C(k,m,q) = C(6,5,0) с одним вступительным строгим ходом.

№28. Эдуард Эйлазян

ChessblogYG 26.12.20



Ser.h#17–N 4+3

Решение №28: **1.Ka5 2.Kb4 3.Kb3 4.Kc2 5.Kd1 6.e5 7.e4 8.e3 9.e2 10.e1B 11.Bd2 12.Bc1 13.e5 14.e4 15.e3 16.e2 17.e1B Ba4#** – красивый правильный эполетный мат**.** Это базисное решение. **N = 816816.**

Автономная траектория черного короля содержит a = 5 ходов, схема Каталана m+k = 6+5 = 11 ходов и один строгий ход (**e5)** r = 1.

Итого число ходов решения n = a+m+k+r = 5+11+1 = 17. Число решений задачи находим по формуле (2):

$N = C^a_n * S = C^a_n * (C^m_{m+k} – C^{m-q-1}_{m+k}) = C^5_{17} * (C^5_{11} – C^4_{11}) = 6188 * (462 - 330) = 6188*132 = 816816$ – миллениум.

2-й этап. Генерация позиций близнецов.

В качестве исходной возьмём позицию задачи №28. Будем считать ее условно зеро-позицией и обозначим буквой **a**. Затем из этой позиции *последовательно* либо *параллельно* получим позиции 14-ти задач-близнецов: **b, c, d, e, f, g, h, i, j, t, k, l, m, v.**

Позицию **b** получим из **a** путем смещения пешки e6 на e5. Позиции **a** и **b** связаны дифферентом Δ1: pe6-e5. Позицию **c** получим из **a** путем смещения короля с a6 на a5 – дифферент Δ5: Ka6-a5. Позицию **d** получим из **b** путем смещения пешки e5 на e4 – дифферент Δ2 и т.д. Всего 8 дифферентов: Δ1: pe6-e5, Δ2: pe5-e4, Δ3: pe4-e3, Δ4: pe3-e2; Δ5: Ka6-a5, Δ6: Ka5-b4, Δ7: Kb4-b3, Δ8: Kb3-c2.

Такой способ образования близнецов позволяет считать их *продолженными задачами* (см. базисное решение).

Задачи-близнецы объединим в **группы** по числу ходов в решении: **A: (b, c), B: (d, e, f), C: (g, h, i, j), D: (t, k, l, m, v).**

Позиции близнецов отличаются друг от друга одним или двумя дифферентами смещения.

Процедура получения всех близнецов представлена в виде схемы на Рис.2.

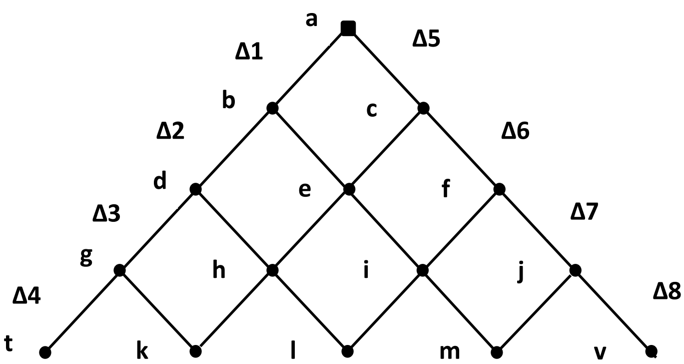


Рис.2. Схема генерации близнецов

Схема генерации близнецов представляет собой граф, имеющий 15 вершин (позиций) и 20 ребер (дифферентов).

Первый ряд занимает одна вершина – позиция задачи №28, число ходов n = 17. Второй ряд: 2 близнеца **b** и **c;** n = 16.

Третий ряд: 3 близнеца **d, e, f;** n = 15. Четвертый ряд: 4 близнеца **g, h, i, j;** n = 14. Пятый ряд: 5 близнецов **t, k, l, m, v;** n = 13.

Все задачи-близнецы имеют ту же структуру решения, что и зеро-позиция: автономная траектория короля – **a** ходов, схема Каталана C(k,m,q) и строгий ход – **r**. Число ходов решения n = a+m+k+r. Число решений $N = C^a_n * S$.

3-й этап. Составление списка решений обратной задачи в форме близнецов.

Таблица 7. **Числовые параметры задач-близнецов. Схема C(k, m, q)**

	zero	Задачи-близнецы													
	n = 17	**A (n = 16)**		**B (n = 15)**			**C (n = 14)**				**D (n = 13)**				
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**t**	**k**	**l**	**m**	**v**
a	5	5	4	5	4	3	5	4	3	2	5	4	3	2	1
k	6	6	6	5	6	6	4	5	6	6	3	4	5	6	6
m	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
q	0	0	0	1	0	0	2	1	0	0	3	2	1	0	0
r	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
S	132	132	132	132	132	132	90	132	132	132	48	90	132	132	132
N	816816	576576	240240	396396	180180	60060	180180	132132	48048	12012	61776	64350	37752	10296	1716

Конфигурация решения каждой из задач-близнецов состоит из 3-х траекторий: одной автономной (a ходов) и двух связанных по схеме Каталана C(k,m,q). Число ходов в решении n = a+m+k+r. Число решений $N = C^a_n * S$.
Число всех возможных наборов в каждой группе находим по формуле: $Z = \Sigma^x_{i=2} C^i_x$, где x – число элементов в группе.
Составим список наборов задач-близнецов, решающих поставленную обратную задачу.

Список наборов задач-близнецов. N - миллениум

1. Группа A — Z = 1
1.1. **[b, c]** — N = N(b) + N(c) = 816816

2. Группа B — $Z = C^2_3 + C^3_3 = 3+1 = 4$
2.1. **[d, e]** — N = N(d) + N(e) = 576576
2.2. **[d, f]** — N = N(d) + N(f) = 456456
2.3. **[e, f]** — N = N(e) + N(f) = 240240
2.4. **[d, e, f]** — N = N(d) + N(e) + N(f) = 636636

3. Группа C — $Z = C^2_4 + C^3_4 + C^4_4 = 6+4+1 = 11$
3.1. **[g, h]** — N = N(g) + N(h) = 312312
3.2. **[g, i]** — N = N(g) + N(i) = 228228
3.3. **[g, j]** — N = N(g) + N(j) = 192192
3.4. **[h, i]** — N = N(h) + N(i) = 180180
3.5. **[h, j]** — N = N(h) + N(j) = 144144
3.6. **[i, j]** — N = N(i) + N(j) = 60060
3.7. **[g, h, i]** — N = N(g) + N(h) + N(i) = 360360
3.8. **[g, h, j]** — N = N(g) + N(h) + N(j) = 324324
3.9. **[g, i, j]** — N = N(g) + N(i) + N(j) = 240240
3.10. **[h, i, j]** — N = N(h) + N(i) + N(j) = 192192
3.11. **[g, h, i, j]** — N = N(g) + N(h) + N(i) + N(j) = 372372

4. Группа D — $Z = C^2_5 + C^3_5 + C^4_5 + C^5_5 = 10+10+5+1 = 26$
4.1. **[t, k]** — N = N(t) + N(k) = 126126
4.2. **[t, m]** — N = N(t) + N(m) = 72072
4.3. **[k, l]** — N = N(k) + N(l) = 102102
4.4. **[k, v]** — N = N(k) + N(v) = 66066
4.5. **[l, m]** — N = N(l) + N(m) = 48048
4.6. **[m, v]** — N = N(m) + N(v) = 12012
4.7. **[t, k, l, m]** — N = N(t) + N(k) + N(l) + N(m) = 174174
4.8. **[t, k, m, v]** — N = N(t) + N(k) + N(m) + N(v) = 138138
4.9. **[k, l, m, v]** — N = N(k) + N(l) + N(m) + N(v) = 114114

Из одной зеро-позиции мы получили 25 решений обратной задачи-1.
А теперь усложним постановку задачи, введя дополнительное ограничение на W:
Постановка задачи-2: *решить обратную задачу Ser.h#n-N в форме близнецов при условии, что N – миллениум-палиндром.*
Если использовать тот же метод генерации близнецов с зеро-позицией №28, то мы получим два решения задачи-2:
1. **[d, e, f]** N = N(d) + N(e) + N(f) = 396396 + 180180 + 60060 = 636636;
2. **[k, v]** N = N(k) + N(v) = 64350 + 1716 = 66066.
Постановка задачи-3: *найти такие значения n и N (N – миллениум), при которых обратная задача Ser.h#n-N имеет решение в обычной форме и в форме близнецов.*
Анализ списка наборов близнецов, решающих задачу-1, позволяет в рамках изложенного метода выявить одно решение задачи-3: набор близнецов **[h, i]** группы C: N = N(h) + N(i) = 132132 + 48048 = 180180 = N(g). Ответ: **n = 14, N = 180180.**
Можно сформулировать еще несколько интересных задач в комплексной форме, например:
- Решить обратную задачу Ser.h#n-N в форме близнецов, каждый из которых имеет решение в форме Неймана.
- Найти такие значения n и N, при которых обратная задача Ser.h#n-N имеет решение и в форме Неймана, и в форме близнецов.
- Решить обратную задачу на серийный мат (пат) в форме дуплекса.

* * *

Мы рассмотрели различные аспекты постановки и решения новой задачи в шахматной композиции – обратной задачи на серийный мат (пат). Но исчерпать всё многообразие возможностей в этой области практически невозможно. Одна только проблема построения математической модели при решении обратной задачи второго рода может стать темой самостоятельного научного исследования. Выбор множества, которому должно принадлежать число решений задачи, также не ограничивается рассмотренными выше случаями (вековая, миллениум, палиндром). Обратные задачи на серийный мат (пат) отличаются своей постановкой, технологией решения, логикой и эстетикой, что позволяет отнести их к особому виду задач шахматной композиции.

Представляет определенный интерес и детальная разработка частных методов решения обратных задач в рамках концепции шахматного моделирования на основе расширенного принципа соответствия. В дальнейшем эти подходы и методы могут быть полезны при решении актуальных научно-практических проблем, связанных с созданием объектов с заданными свойствами.

Эдуард Эйлазян — 19.02.20 - 19.12.20