Эдуард Эйлазян

Обратные задачи в шахматной композиции

Часть 1

1. Об обратных задачах

Понятие "обратная задача" знакомо всем, кто когда-то учился в школе, даже тем, кто математику не любит и старается держаться от нее подальше. В школьной программе по математике и физике решению обратных задач уделяется достаточно большое внимание, поскольку это способствует более глубокому усвоению учебного материала. Кроме того, теория и методы решения обратных задач используются не только в учебно-педагогическом процессе, но и в научно-исследовательской работе. Примеры постановки и решения обратных задач можно найти в таких областях деятельности как: математика, механика, геофизика, астрономия, робототехника, спектральный анализ, медицина, экономика, бизнес и т. д.

Пожалуй, самый известный в науке пример решения обратной задачи связан с открытием 8-й планеты – Нептуна. В небесной механике возмущения движения небесного тела обычно вычисляют по уже известному расположению других планет. При изучении движения Урана возникла необходимость решить обратную задачу: зная возмущения, найти расположение вызывающей их неизвестной планеты. Эту трудную задачу решил французский астроном Урбен Леверье в 1845 году.

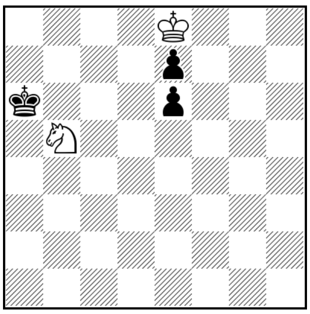
Имеет ли шахматная композиция какое-либо отношение к решению обратных задач? Имеет самое непосредственное. Если поиск комбинаций в практической партии, решение задач и этюдов условно считать прямой задачей в шахматах, то составление шахматных композиций – это решение обратной задачи. Можно даже утверждать, что шахматная композиция возникла как “обратная задача” по отношению к шахматной игре, а затем в процессе длительного исторического развития сформировалась как самостоятельное направление шахматного искусства. В каждом жанре шахматной композиции действуют свои “правила игры” и свои особенности решения “обратной задачи”.

2. Постановка обратной задачи в жанре Ser.h#n-N (Ser.h=n-N).

В данной статье речь пойдет о постановке и решении новой обратной задачи в шахматной композиции.
Есть такой жанр: серийный кооперативный мат (или пат) в n ходов Ser.h#n (Ser.h=n). Черные делают n ходов подряд, после чего у белых появляется возможность объявить черному королю мат в 1 ход (или запатовать их). Но есть особая разновидность задач этого жанра: помимо решения самой задачи необходимо ещё найти число решений. Для этих целей привлекается комбинаторный анализ. Множественность решений возникает за счет перестановок ходов, но без разветвлений и дуалей. Каждая фигура движется строго по своей траектории от начального положения к финальному. Это шахматно-математические задачи, не имеющие специального названия. Обозначать их можно так: Ser.h#n-N? и Ser.h=n-N?.

В 1994 году был проведен международный конкурс решения таких шахматно-математических задач.
Вот одна из задач того конкурса.

№1. Eero Bonsdorff



Ser.h#16-N? 2+3

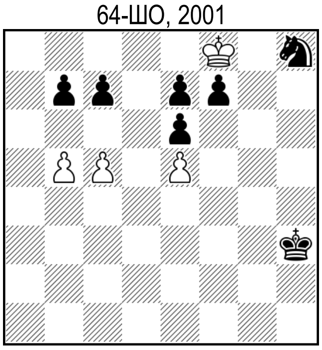
Решение. **1.-5.e1♖ 6.♖c1 7.-11.e1♗ 12.-13.♗b8 14.♖c7 15.-16.♔c8 ♘d6#.**
Подсчет числа решений – задача из области комбинаторики. $N = C^2_{16} * C(5) = 120*42 = 5040$.
Здесь C(5) – число Каталана. (Числа Каталана C(n) для n = 0, 1, 2, … образуют последовательность: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132...).

В своем письме с решениями конкурсных задач я задал организаторам конкурса ряд вопросов, среди которых был такой: *можете ли Вы составить задачу Ser.h#n по заданному числу решений N?* По существу, это была постановка обратной задачи.

На одном из занятий с Русланом Пономаревым при подготовке к чемпионату мира 2001-го года я предложил ему для решения несколько задач вышеупомянутого конкурса. Руслан так увлекся, что на следующее утро показал мне две составленные им за ночь задачи. Одна из них опубликована в журнале «64-ШО» №11 2001.

№2. Руслан Пономарев

64-ШО, 2001



Ser.h=36-N? 4+7

Решение. 1.-4.f2 5.-6.♔f5 7.f1♖ 8.♖a1 9.-12.♘b6 13.-17.e1♗ 18.-20.♔d8 21.-22.♖c8 23.♘a8 24.-27.♗b8 28.-32.e1♗ 33.-35.♗a7 36.b6 c6 пат.

Очень красивая задача, по богатству содержания превосходящая все конкурсные задачи.

Мы привели два примера шахматно-математических задач, в которых ставится и решается *прямая задача*.

Но можно поставить и обратную задачу.

Формулировка обратной задачи: для заданных значений n и N составить шахматно-математическую задачу на серийный кооперативный мат (или пат) в n ходов, имеющую N решений.

Для задач такого типа можно ввести обозначения: Ser.h#n-N и Ser.h=n-N.

Пару чисел (n, N) будем называть *исходными данными* задачи. Не факт, что для любой пары чисел (n, N) решение существует.

Для решения сформулированной выше обратной задачи мной разработана теория, основные положения которой изложены в настоящей статье.

Этапы решения обратной задачи.

Решение любой шахматной задачи жанра Ser.h#n-N? представляет собой некую совокупность траекторий движения фигур на доске. Но это не произвольная совокупность, а четкая *конфигурация взаимосвязанных траекторий*, которая характеризуется (описывается) набором параметров (количественных и качественных). Траекторию образуют одна фигура или группа фигур, движущихся в решении в строго определенной последовательности. Конфигурацию характеризуют: общее число траекторий, число автономных траекторий, особенности взаимного расположения траекторий на доске, тип взаимодействия траекторий. Эти отличительные особенности позволяют провести классификацию конфигураций траекторий. Каждому набору параметров конфигурации соответствует N – число решений задачи. Это – прямая задача: по заданной позиции найти число решений.

Решение обратной задачи жанра Ser.h#n-N состоит из двух этапов.

Первый этап: построение математической модели решения обратной задачи.

Исходные данные задачи – число решений N и число ходов в решении n. Из множества возможных абстрактных конфигураций выбираем конфигурацию траекторий определенного класса, руководствуясь соображениями простоты и удобства последующей реализации. Затем для выбранной конфигурации траекторий уточняем (вычисляем) значения параметров. На этой стадии решения у нас тоже имеется свобода выбора, но в пределах заданных ограничений (значения n, N). Если удовлетворительной системы параметров для выбранной конфигурации нет, то необходимо перейти к другой, более адекватной конфигурации траекторий.

Второй этап: реализация математической модели на шахматной доске в виде шахматной задачи Ser.h#n-N (Ser.h=n-N).

Может возникнуть естественный вопрос: как по математической модели составить шахматную задачу? Никаких четких указаний на этот счет нет и быть не может. Составление любой задачи – процесс творческий. Можно дать лишь рекомендации общего характера. Прежде всего надо четко представить себе сценарий решения, содержащий конфигурацию траекторий модели, и под этот сценарий придумать идею задачи. В процессе составления необходимо добиваться точного совпадения параметров решения с параметрами модели. Это довольно трудоемкий процесс и не всегда удается для заданных n и N довести решение обратной задачи до логического завершения. (В некоторых случаях в условии обратной задачи задаётся только значение N, а параметр n может принимать произвольные значения).

Конечный результат зависит от того насколько органично шахматные компоненты задачи сочетаются с параметрами модели. Понятно, что по одной модели может быть составлено множество задач, имеющих определенную эстетическую ценность.

Описанные выше два этапа решения обратной задачи можно рассматривать как **две разновидности обратных задач**.

Прямая задача. Составление шахматной задачи жанра Ser.h#n-N? без каких-либо предварительных условий и ограничений. На выходе мы получаем задачу, математическую модель и два числа (n, N).

Обратная задача 1-го рода. По заданной модели составить шахматную задачу Ser.h#n-N.

В качестве исходной математической модели может быть использована модель задачи-прототипа жанра Ser.h#n-N?, либо оригинальная модель, построенная в результате математического исследования.

Обратная задача 2-го рода. Для заданной пары чисел (n, N) составить задачу жанра Ser.h#n-N в n ходов, имеющую N решений.

Условно можно считать, что решение обратной задачи 1-го рода – это составление задачи на заданную тему. Автору приходится решать только шахматные проблемы, поскольку модель со всеми своими параметрами задана однозначно. При решении обратной задачи 2-го рода автору необходимо предварительно провести математическое исследование, построить одну или несколько математических моделей (если это возможно), а затем по одной из них составить шахматную задачу. В этом случае автор свободен в выборе модели из некоторого множества построенных моделей.

3. Вычисления на решетках. Два основных принципа.

Метод построения математической модели задачи удобно излагать, имея наглядное графическое представление решения задачи в виде решетки. Проиллюстрируем это на простом примере.

Пусть решение некоторой условной задачи Ser.h#n-N? содержит две автономные (для простоты) траектории длиной 3 хода и 8 ходов соответственно. Ясно, что в этом случае n = 11. Число решений требуется найти. Нам даже не надо знать, о какой конкретно позиции идет речь. Приведенных данных вполне достаточно для изложения сути метода. Строим решетку, содержащую 3×8=24 ячейки и (3+1)*(8+1) = 36 узлов. (В данном случае мы получим двумерную решетку. В общем случае решетка будет многомерная – по числу траекторий, образующих конфигурацию.) Ход по одной траектории будем отображать на решетке движением на один шаг по вертикали вверх, а ход по другой траектории – движением на один шаг по горизонтали вправо. Решетку можно трактовать как фазовое пространство решений задачи. Узлы решетки – точки в фазовом пространстве – соответствуют позициям, возникающим на доске при демонстрации решения от начальной позиции (нижний левый угол) до финальной (верхний правый угол). Каждое решение задачи представляет собой траекторию движения фазовой точки из начальной позиции в конечную (не путать траектории фазовой точки на решетке и траектории фигур в решении задачи!). В каждой ячейке будем записывать число, равное числу способов достижения верхнего правого узла данной ячейки из начальной позиции. Число, стоящее в верхней правой ячейке решетки, будем называть *суммой решетки* (S).

Заполнение ячеек решетки от начального узла до конечного будем называть движением *в прямом направлении.* Но можно начать процесс заполнения решетки с конечного узла и двигаться к начальному. Такой процесс будем называть движением *в обратном направлении*. В этом случае число в каждой ячейке будет относиться к левому нижнему углу ячейки.

4	10	20	35	56	84	120	165
3	6	10	15	21	28	36	45
2	3	4	5	6	7	8	9

Решетка задачи Ser.h#11-N?

Мы получили фрагмент хорошо известного со времен Омара Хайяма треугольника Паскаля.
«Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике.» Мартин Гарднер.
В нашем случае сумма решетки S=165, т.е. наша условная задача имеет 165 решений.
В более сложных случаях полезно использовать два принципа, упрощающих вычисления на решетках: принцип обратимости и принцип аддитивности.
Принцип обратимости. При изменении направления заполнения решетки сумма решетки сохраняет свое значение.
Принцип аддитивности. Число траекторий фазовой точки, проходящих через данный узел, равно произведению числа траекторий, ведущих из начального узла в данный узел на число траекторий, ведущих из данного узла в конечный узел.
Проиллюстрируем действие этих принципов на нашем демонстрационном примере.
Принцип обратимости. Для симметричной решетки результат очевиден.

9	8	7	6	5	4	3	2
45	36	28	21	15	10	6	3
165	120	84	56	35	20	10	4

Сумма решетки S = 165

При желании можно убедиться в том, что тот же результат справедлив и для произвольной решетки.
Принцип аддитивности. Выделим на решетке узлы, достижимые из начальной точки за k ходов. Пусть для примера k=6.
Для каждого из этих четырех узлов подсчитаем его значение в прямом и обратном направлении. Для каждого узла получим пару чисел (a_i, b_i). Принцип аддитивности позволяет по этим числам найти сумму решетки.

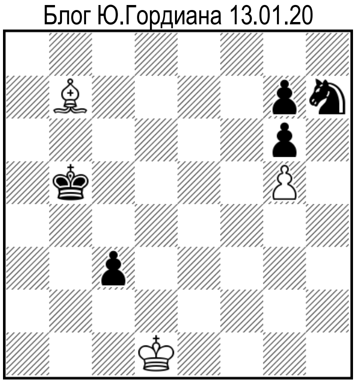
4	10	20		5	4	3	2
3	6	10	15		10	6	3
2	3	4	5	6		10	4

Сумма решетки: $S = \Sigma a_i{*}b_i = 20{*}1 + 15{*}5 + 6{*}10 + 1{*}10 = 165$.

4. Пример решения обратной задачи 1-го рода

Решение любой задачи Ser.h#n-N? содержит полную информацию о её математической модели, которую определяют: конфигурация траекторий, параметры, число решений. Используя эту информацию в качестве исходных данных, можно поставить и решить обратную задачу 1-го рода. В результате мы получим новую шахматную задачу, сходную по структуре с исходной.
Пример. Возьмём в качестве прототипа задачу №1. Задача №3 составлена на основе анализа структуры решения задачи №1.

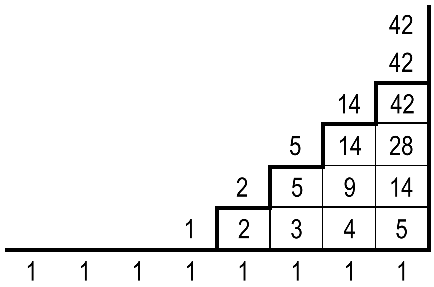
№3. Эдуард Эйлазян
Блог Ю.Гордиана 13.01.20



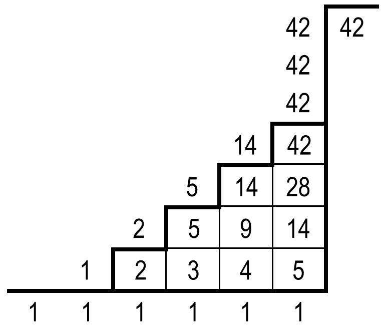
Ser.h#16-5040 3+5

Решение. 1.♘:g5 2.♘e4 3.-7.g1♗ 8.♗d4 9-13.g1♗ 14.♗e3 15.-16.♔d3 ♗a6#.
Число решений подсчитывается точно так же, как и в задаче №1: $N = C^2_{16} * C(5) = 120 * 42 = 5040$.

В задаче №1 есть одна автономная траектория (2 хода короля), а две траектории взаимосвязаны по схеме Каталана. Одна траектория – ходы пешки e6 (горизонтальные отрезки решетки), вторая – ходы пешки e7 (вертикальные отрезки).
В задаче №3 также имеется одна автономная траектория (2 хода короля), а две траектории взаимосвязаны по схеме Каталана. Одну траекторию образуют ходы коня и ходы пешки g6 (горизонтальные отрезки), а вторую – ходы пешки g7 (вертикальные отрезки). Интересно сопоставить решетки, построенные для этих двух задач.



Модель задачи №3



Модель задачи №1

Модели двух задач (№1 и №3) математически эквивалентны, они отличаются только тем, что ячейки одной решетки заполняются в прямом направлении, а ячейки другой – в обратном направлении, что, как мы знаем, никак не влияет ни на число ходов в решении (n = 16), ни на число решений ($N = C^2_{16} * S = 120 * C(5) = 120*42 = 5040$).

5. Вековая задача – обратная задача 2-го рода

Прежде чем приступать к изложению теории решения обратной задачи 2-го рода в общем виде, попробуем решить одну частную задачу на основе эвристических соображений. Это нам поможет выявить трудности и наметить пути их преодоления при построении более общей теории.

Пусть требуется решить обратную задачу 2-го рода: составить задачу Ser.h#n-N при заданных значениях n=20 и N=2020. Почему выбраны именно такие числа, думаю, понятно без пояснений.
Разложим число решений N на простые множители. N = 2020 = 2*2*5*101. Или N = 20*101 = 101*20 → 1.01.20 - календарная дата Нового года (с сокращённой формой записи года)! Подобные совпадения (число лет = числу веков) случается раз в 100 лет! 1818, 1919, 2020, 2121 – ряд этот можно расширять в обе стороны, пока производящее число n остается двузначным.
Такие задачи заслуживают особого названия.
“Вековая задача” – так будем называть задачу в n ходов, имеющую N решений, где n – двузначное число, а N = n*101.
Для решения обратной задачи Ser.h#20-2020 нам надо выбрать конфигурацию траекторий решения и уточнить значения параметров конфигурации.
К параметрам относятся: число траекторий, длина каждой траектории, числовые характеристики конкретных форм взаимодействия траекторий. Разумеется, выбор конфигурации траекторий не ограничен жесткими рамками, но мы будем исходить из принципа простоты и естественности.

Проводим следующие рассуждения:
Пусть в конфигурации траекторий имеется одна автономная траектория длиной в 1 ход.
Поскольку n = 20, то на остальные траектории конфигурации приходится 19 ходов.
Конфигурация без автономной траектории должна давать 101 решение при 19 ходах.
Тогда общее число решений исходной задачи будет равно заданному числу N = 2020.

Нам удалось свести исходную задачу к более простой Ser.h#19-101, (S = 101). Будет ли достаточно двух траекторий? Предположим, что да. Тогда k + m = 19, где k и m количество ходов этих траекторий соответственно. Существует 9 пар таких чисел. Начнем с самого простого случая: k=1, m=18. В этом случае число решений равно C^1_{19} =19 <101. Не подходит. Следующая пара k=2, m=17. Если бы эти траектории были независимы, то число решений C^2_{2+17} = 171, т.е. было бы больше 101. Значит эти две траектории должны быть определенным образом взаимосвязаны. Ничего определенного о характере взаимодействия двух траекторий мы a priori сказать не можем. Пока ограничимся рассмотрением лишь одного частного случая: их прямого пересечения (обструкция). (Другие типы взаимодействия будут рассмотрены ниже.)

Параметры пересечения траекторий: 1-й ход на короткой траектории, q-й ход – на длинной. Найдем значение q из условия, что число решений равно S = 101. $S = C^2_{2+q-1} + C^2_{2+16-q} = C^2_{q+1} + C^2_{18-q} = 101$.
Или после упрощений получим квадратное уравнение $q^2 – 17q +52 = 0$.
Решая это уравнение найдем два значения для q: $q_1 = 4$ и $q_2 = 13$.
Мы нашли параметры траекторий для выбранной конфигурации. Параметры математической модели решения задачи получены. Представим модель в виде решетки (при q = 4). (Здесь и далее автономный ход на решетке не отображается.)

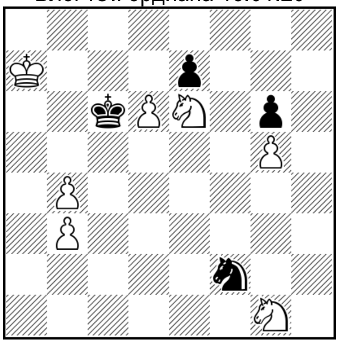
3	6	10	10	11	13	16	20	25	31	38	46	55	65	76	88	101
2	3	4		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

q t

При реализация полученной математической модели были рассмотрены десятки схем, прежде чем появилась корректная задача. Это первая задача в жанре Ser.h#n-N.

№4. Эдуард Эйлазян

Блог Ю.Гордиана 13.01.20



Ser.h #20-2020 7+4

Решение. 1.ed 2.-6.d1♖ 7.♖:g1 8.♖:g5 9.♖c5 10.-14.g1♗ 15.-17.♗a5 18.-19.♘:b4 20.♔b5 ♘d4#.

Число решений.

1. Ход ♔b5 можно сделать на любом ходу решения (20 возможных способов);
2. Из оставшихся 19 ходов 2 хода делает конь и 17 ходов делают пешки (до и после превращения);
3. Траектории движения коня и пешки е7 пересекаются на поле d3;
4. До пересечения траекторий 2 хода коня и 3 хода пешки можно выполнить C^2_{2+3} способами.
5. После пересечения траекторий 2 хода коня и оставшиеся 12 ходов можно выполнить C^2_{2+12} способами;
6. Следовательно 19 ходов черные могут сделать $C^2_5 + C^2_{14} = 10 + 91 = 101$ способом;
7. С учетом хода короля (см. п.1) получаем общее число решений **N = 101 * 20 = 2020.**

Содержание задачи.

1. Число решений задачи N = 2020 при задании: мат в 20 ходов. “Вековая задача” текущего года;
2. Идеальный мат в центре доски.
3. Эксцельсиор, два слабых превращения; три активных блокирования разными фигурами.

6. О классификации конфигураций траекторий

Решение обратной задачи 2-го рода в самом общем виде представляет собой нетривиальную математическую проблему. Главная трудность состоит в том, что при разработке общего метода решения необходимо учитывать влияние большого числа факторов, таких как число траекторий в конфигурации, характер их взаимодействия, параметры взаимодействия. Одновременный учет всех этих факторов несовместим с такими важными характеристиками метода как простота, наглядность и удобство в применении.

Другая трудность заключается в том, что даже если удастся разработать регулярный метод построения моделей, останется проблема реализации сложных моделей в виде шахматной задачи. Построение модели не является конечной целью решения обратной задачи 2-го рода. Поэтому нет никаких оснований оценивать качество построенной модели, её оптимальность и эффективность по каким-либо заранее заданным объективным критериям. Говорить о ценности модели можно лишь после создания на ее основе произведений шахматной композиции. Но это уже субъективный критерий оценки.

Более разумная стратегия при разработке теории решения обратных задач 2-го рода состоит в продвижении от простого к сложному. Надо выделить простейшие схемы конфигураций траекторий, провести исследование, получить значения параметров моделей. После этого перейти к исследованию более сложных случаев с дальнейшим обобщением полученных результатов.

Следуя этой стратегии, начнем с исследования конфигураций, содержащих всего три траектории. Пусть a, k, m – длины этих траекторий. Но даже в этом случае задача остается достаточно сложной в силу своей многофакторности. Необходимо ввести дополнительные ограничения и рассмотреть частные случаи этой упрощенной задачи. Если не оговорено противное, то будем считать, что одна из трех траекторий в конфигурации – автономная и длина её равна a. Если решетка, построенная на двух зависимых траекториях, имеет сумму S, то $N = C^{a}_{n} * S$. Отсюда следует, что для вековых задач a=1 при S=101.

Частные случаи, представляющие практический интерес:

1. Вековая задача 2-го рода (n, n*101). Распределение ходов решения по траекториям (1+2+m); схема ВЗ(1+2+m=n).
2. Обратная задача 2-го рода (n, n*S). Распределение ходов (1+2+m); схема ОЗ(1+2+m=n).
3. Вековая задача с исходными данными (n=20, N=2020). Распределение ходов (1+k+m); схема ВЗ(1+ k+m=20).
4. Обратная задача 2-го рода (n, n*S). Распределение ходов (1+k+m); схема ОЗ(1+k+m=n).
5. Схемы Каталана (о них – во 2-й части).
6. Прочие схемы с тремя траекториями.

Исследуем первый частный случай – схему ВЗ(1+2+m=n). Такая конфигурация содержит 3 траектории – одну автономную (1 ход) и две зависимые (короткая – 2 хода и длинная – m ходов). Очевидно число решений задачи зависит от типа взаимодействия зависимых траекторий.

Основные типы взаимодействия траекторий:

1. Обструкция;
2. Перекрытие длинной траектории);
3. Перекрытие первого хода короткой траектории;
4. Перекрытие второго хода короткой траектории.

Эти четыре основных типа взаимодействия траекторий позволяют получить ещё 16 парных комбинаций (с учетом их следования): При этом надо ещё учесть, что протяженность зоны обструкции (или зоны перекрытия) также может варьироваться.

7. Математические модели решения вековой задачи B3(1+2+m=n).

1. Обструкция

Постановка задачи: построить модель вековой задачи Ser.h#n-N по схеме B3(1+2+m=n) при обструкции траекторий.
Установить, при каких значениях n задача имеет решение.

Строим решетку размером 2×m с подвижной правой границей, зависящей от числа ходов в задании n = m+3.
Обструкция отображается на решетке выделенным квадратом без внутренних границ (квадрат обструкции).
Сумма решетки зависит от двух параметров:
x – расстояние (в узлах) от левой границы до квадрата обструкции;
t – расстояние (в узлах) от правой границы до квадрата обструкции.

b_1 t

						a_1										S
									b_2							

x a_2

Вывод уравнения. Для подсчета суммы решетки применим принцип аддитивности.
Для каждого из узлов, соединенных диагональю квадрата обструкции, подсчитаем его значение в прямом и обратном направлении.
Два значения равны 1 ($a_2 = b_1 = 1$), а два других: $a_1 = C^2_{x+1}$, $b_2 = C^2_{t+1}$.
Сумма решетки S = a1 * 1 + 1 * b_2. $S = C^2_{x+1} + C^2_{t+1}$.
Решаем обратную задачу для вековой задачи: S = 101. 2*S = x(x+1) + t(t+1) = 202.
Мы получили нелинейное диофантово уравнение с двумя неизвестными.
Уравнение имеет два решения: x=4, t=13 и x=13, t=4. Отсюда можно найти n.
Длина решетки x+t+1 узлов. Число ходов на длинной траектории m=(x+t+1)-1 = 17, n=m+3 = 20.
Вывод: вековая задача Ser.h#n-N по схеме B3(1+2+m=n) при обструкции траекторий имеет решение только при n=20.

Таблица 1

№ решения	x	t	m	n
1	4	13	17	20
2	13	4	17	20

Как видим, решения симметричны относительно границ решетки – проявление действия принципа обратимости.

Математическая модель решения вековой задачи с исходными данными (20, 2020), (x=4, t=13):

3	6	10	10	11	13	16	20	25	31	38	46	55	65	76	88	101
2	3	4		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

x t

Примечание: Увеличение зоны обструкции на d ходов приводит к увеличению на d числа ходов решения.
При этом сумма решетки сохраняет свое значение, и мы получаем модель вековой задачи с параметрами n+d и N = (n+d)*101.

2. Перекрытие длинной траектории

Постановка задачи: построить модель вековой задачи Ser.h#n-N по схеме B3(1+2+m=n) при перекрытии длинной траектории.
Установить, при каких значениях n задача имеет решение.
Решение этой задачи ничем принципиально не отличается от решения предыдущей. Схема решетки:

1 t

						a_1		b_2									S
							1		b_3								

x 1

Сумма решетки $S = a_1 * 1 + 1 * b_2 +1* b_3 = a_1 + b_2 + b_3$. $S = C^2_{x+1} + C^2_{t+1}$.
Решаем обратную задачу для вековой задачи: S = 101. 2*S = x(x+1) + t(t+1) = 202.
Мы получили точно такое же нелинейное диофантово уравнение с двумя неизвестными, что и в случае обструкции.
Уравнение имеет два решения: x=4, t=13 и x=13, t=4. Отсюда можно найти n.
Длина решетки x+t узлов. Число ходов на длинной траектории m=(x+t)-1 = 16, n=m+3 = 19.
Вывод: вековая задача Ser.h#n-N по схеме B3(1+2+m=n) при перекрытии длинной траектории имеет решение только при n=19.

Таблица 2

№ решения	x	t	m	n
1	4	13	16	19
2	13	4	16	19

И здесь решения симметричны относительно границ решетки.

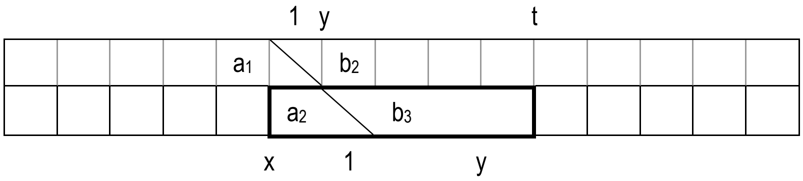
Математическая модель решения вековой задачи с исходными данными (19, 1919), (x=4, t=13):

3	6	10	11	13	16	20	25	31	38	46	55	65	76	88	101
2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

x t

3. Перекрытие первого хода короткой траектории

Постановка задачи: построить модель вековой задачи Ser.h#n-N по схеме B3(1+2+m=n) при перекрытии первого хода короткой траектории.
Строим решетку размером 2 × m с подвижной правой границей.
Зона перекрытия отображается на решетке выделенным прямоугольником без внутренних границ.
Сумма решетки зависит от трех параметров:
x – расстояние (в узлах) от левой границы до зоны перекрытия;
y – расстояние (в узлах) между границами зоны перекрытия
t – расстояние (в узлах) от правой границы до зоны перекрытия. Схема решетки:



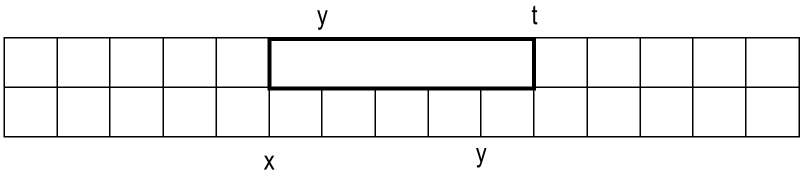
Для подсчета суммы решетки применим принцип аддитивности.
$S = a_1 * 1 + a_2 * b_2 + 1 * b_3$; $S = C^2_{x+1} + x*(t+y) + C^2_{t+1}$
Решаем обратную задачу при S = 101.
2*S = x(x+1) + 2x(y+t) +t(t+1) = 202.
Мы получили нелинейное диофантово уравнение с тремя неизвестными. y = (202 – (x+t)*(x+t+1))/2x
Решения уравнения представлены в таблице 3 (m = x+y+t-1, n = m+3, x ≥ 1, y ≥ 1, t ≥ 1, n < 100).

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	4	4	5	5	5	5	7	7	8	10
y	91	86	80	73	65	56	46	35	23	10	43	40	28	23	5	20	14	16	13	7	2	8	5	7	1
t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	4	7	8	11	2	5	1	3	6	8	2	4	1	3
m	94	90	85	79	72	64	55	45	34	22	47	45	36	35	17	25	22	21	20	17	14	16	15	15	13
n	97	93	88	82	75	67	58	48	37	25	50	48	39	38	20	28	25	24	23	20	17	19	18	18	16

4. Перекрытие второго хода короткой траектории

Постановка задачи: построить модель вековой задачи Ser.h#n-N по схеме B3(1+2+m=n) при перекрытии второго хода короткой траектории.
Решение этой задачи ничем принципиально не отличается от решения предыдущей. Схема решетки:



Сумма решетки зависит от трех параметров:
x – расстояние (в узлах) от левой границы решетки до зоны перекрытия;
y – расстояние (в узлах) между границами зоны перекрытия
t – расстояние (в узлах) от правой границы решетки до зоны перекрытия.
Сумма решетки $S = C^2_{x+1} + t(y+x) + C^2_{t+1}$.
(Эта формула может быть получена из формулы $S = C^2_{x+1} + x(y+t) + C^2_{t+1}$ предыдущего пункта при помощи принципа обратимости).
Решаем обратную задачу (для вековой задачи) при S = 101. x(x+1) + 2t*(x+y) +t(t+1) = 202.
Мы получили нелинейное диофантово уравнение с тремя неизвестными. y = (202 – (x+t)*(x+t+1))/2t
Решения уравнения представлены в таблице 4 (m = x+y+t-1, n = m+3, x ≥ 1, y ≥ 1, t ≥ 1, n <100).

Таблица 4

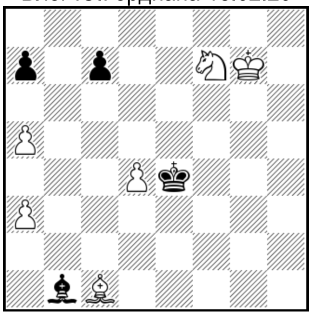
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	4	7	8	11	2	5	1	3	6	8	2	4	1	3
y	91	86	80	73	65	56	46	35	23	10	43	40	28	23	5	20	14	16	13	7	2	8	5	7	1
t	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	4	4	5	5	5	5	7	7	8	10
m	94	90	85	79	72	64	55	45	34	22	47	45	36	35	17	25	22	21	20	17	14	16	15	15	13
n	97	93	88	82	75	67	58	48	37	25	50	48	39	38	20	28	25	24	23	20	17	19	18	18	16

8. Примеры решения обратных задач.

1. Составить вековую задачу Ser.h#20-2020.

№5. Эдуард Эйлазян

Блог Ю.Гордиана 18.02.20



Ser.h #20-2020 6+4

Решение. 1.c5 2.cd 3.-5.d1♖ 6.-7.♖:a3 8.♖:a5 9.♖e5 10.-14.a1♘ 15.-17.♘g4 18.-19.♗e6 20.♔f5 ♘d6#.

Решение содержит 3 траектории: автономная ♔f5, и две связаны обструкцией на поле a2.

Параметры модели: x=13, t=4, m = x + t = 17, n = m + 3 = 20, N = n*101 = 2020.

3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	91	92	94	97	101
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		1	2	3	4

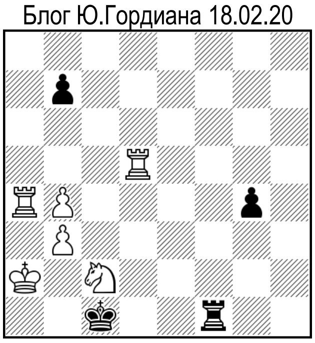
x t

Математическая модель: Вековая задача (1+2+m=n). Таблица 1, решение №2.

2. Составить вековую задачу Ser.h=18-1818

№6. Эдуард Эйлазян

Блог Ю.Гордиана 18.02.20



Ser.h=18-1818 6+4

Решение. 1.-3.g1♗ 4.♗d4 5.-7.♔e4 8.♗e5 9.-10.♔e6 11.♗d6 12.-13.♔c6 14.♗c5 15.♔b5 16.-17.♖b4 18.b6 ♘:b4 пат.

Решение содержит 3 траектории: автономная b6, и две связаны перекрытием второго хода короткой траектории.

Зона перекрытия – 5 ходов. Параметры модели: x=4, y = 5, t=7, m = x+y+t-1 = 15, n = m+3 = 18.

3	6	10	10	10	10	10	10	20	31	43	56	70	85	101
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

x y t

Математическая модель: Вековая задача (1+2+m=n). Таблица 4, решение №23.

Эдуард Эйлазян 19.02.20

Продолжение следует